Équations macroscopiques de la physique classique
Applications

Leçon 1

Advection et diffusion d'espèces.

G. Vinsard

Gerard.Vinsard@univ-lorraine.fr

4 avril 2023

Objectifs

- Les mécanismes d'advection et de diffusion de densités scalaires ont été introduits leçon 1 dans le cadre restreint de la géométrie 1D ;
- l'objectif est d'exprimer ces modèles en 3D.
- Ainsi d'ailleurs que de fournir les éléments de vocabulaire et un choix d'exemples.

L'advection – 0

- L'advection en 3D a déjà été introduite dans la partie cinématique de la leçon sur les fluides où il s'agissait d'exprimer la densité de forces d'inertie. La quantité advectée était la masse volumique dans un fluide compressible.

- On suppose ici qu'une quantité d'espèce quelconque est répartie avec une concentration c dans un volume de fluide incompressible. On suppose de plus que si le fluide n'était pas en mouvement, cette concentration ne varierait pas dans le temps.

- Et consécutivement que sa variation dans le temps est due à un mouvement dans le fluide. Le modèle permettant le calcul de cette évolution repose sur ce qu'on appelle l'équation d'advection.

L'advection – 1

- Le champ de vitesses $\vec{v} \; : \; (t,\vec{x}) \longrightarrow \vec{v}\,(t,\vec{x})$ est une donnée.

- On introduit son flot qui est une fonction définie par

$$\partial_t \vec{\Xi}\,(t,\vec{x}) = \vec{v}\left(t,\vec{\Xi}\,(t,\vec{x})\right)\;;\;\vec{\Xi}\,(t=0,\vec{x}) = \vec{x}$$

C'est exactement la même fonction $\vec{\Xi}$ qui est définie dans la leçon sur les fluides. Seulement cette fois ce n'est pas cette fonction $\vec{\Xi}$ qui est donnée et le champ de vitesses $\vec{v}$ déduit d'elle mais l'inverse, d'où la dénomination pour $\vec{\Xi}$ de flot du champ de vitesse.

- Comme le faisait la masse volumique, la concentration $c \; : \; (t,\vec{x}) \longrightarrow c\,(t,\vec{x})$ de l'espèce (massique kg/m^3 ou en nombre $1/m^3$) introduite dans le volume du fluide évolue dans le temps de manière que

$$c\left(t,\vec{\Xi}\,(t,\vec{x})\right)\; det\left(\underline{\underline{\nabla}}\left(\vec{\Xi}\,(t,\vec{x})\right)\right) = c\,(t=0,\vec{x})$$

L'advection – 2

- Et alors la dérivation de cette relation conduit à

$$\partial_t c \; + \; \vec{\nabla} \cdot (c \; \vec{v}) = 0$$

qui est l'équation d'advection.

- Celle-ci traduit évidemment la conservation de la quantité d'espèce Q_0 initialement placée dans un domaine D_0. En effet, par changement de variables,

$$\begin{aligned} Q_0 &= \int_{\vec{\Xi}(t,D_0)} c\,(t,\vec{x}) \; dV \\ &+ \int_{D_0} c\left(t,\vec{\Xi}\,(t,\vec{x})\right) \; det\left(\underline{\underline{\nabla}}\left(\vec{\Xi}\,(t,\vec{x})\right)\right) \; dV \\ &+ \int_{D_0} c\,(t=0,\vec{x}) \; dV \end{aligned}$$

L'advection – 3

- Si maintenant on choisit d'examiner la quantité $Q = \int_{D_0} c\,(t, \vec{x})\ dV$ qu'il y a à l'instant t dans le domaine D_0, il vient que

$$\frac{d\,Q}{dt} = \int_{D_0} \partial_t c\,(t, \vec{x})\ dV = \int_{D_0} -\vec{\nabla}\cdot(c\ \vec{v})\ dV$$

soit encore (avec Green-Ostrogradski),

$$\frac{d\,Q}{dt} + \int_{\partial D_0} \vec{n}\cdot c\ \vec{v}\ dV = 0$$

La variation temporelle de Q s'équilibre avec le flux du champ de vecteurs

$$\vec{\Phi} = c\ \vec{v}$$

à travers le bord de D_0.
Ce champ $\vec{\Phi} = c\ \vec{v}$ s'appelle la densité de flux advectif.
Si l'unité de la concentration c est le Q/m^3, l'unité de la densité de flux est le $Q/(m^2\ s)$.

L'advection – 4

► Un champ de vitesses $\vec{v}$ étant donné, le problème d'advection stationnaire consiste à chercher c_∞ solution de

$$\vec{\nabla}\cdot(c_\infty\ \vec{v}) = 0$$

► Si de plus $\vec{v}$ a la propriété d'être à divergence nulle ($\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0$) le problème se ramène alors à la recherche de c_∞ tel que

$$\vec{\nabla} c_\infty \cdot \vec{v} = 0$$

soit celui des surfaces définies par les positions $\vec{x}$ telles que $c_\infty(\vec{x}) =$ Constante et dont la normale est orthogonale au champ de vecteurs $\vec{v}$. C'est donc géométriquement clair.

► Le problème d'advection instationnaire consiste à chercher c solution de

$$\partial_t c\ +\ \vec{\nabla}\cdot(c\ \vec{v}) = 0$$

L'advection – 5

- Si $\vec{v}$ est lui-même stationnaire, i.e. $\partial_t \vec{v} = \vec{0}$, sa résolution peut permettre de fournir à la limite $t \longrightarrow \infty$ la solution c_∞ du problème stationnaire mais ce n'est pas assuré parce que la solution stationnaire peut ne pas exister.

- Un exemple (un peu inintéressant) où la solution stationnaire existe est $\vec{v} = V\ \vec{k}_z$ et $c_\infty = f(x, y)$ où f est une fonction quelconque.

- Si par contre (en cylindrique)

$$\vec{v} = \omega\ \vec{k}_\theta \begin{cases} r & \text{si } r < R \\ \frac{R^2}{r} & \text{sinon} \end{cases}$$

et que la concentration initiale est (en cartésien)

$$c_0 = \begin{cases} 1 & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

L'advection – 6

- La ligne de séparation entre concentrations de 1 et de 0 évolue donc
  - Dans sa partie intérieure au disque $r < R$ comme un segment droit tournant à la vitesse angulaire ω ;
  - Dans sa partie extérieure au disque comme la spirale d'équation polaire

$$\vartheta = \frac{R^2}{r^2}\,\omega\ t$$

- Cette spirale est de plus en plus resserrée au fur et à mesure que passe le temps comme on peut le voir, par exemple avec

```
plot2d(ev([[parametric,r*cos(t),r*sin(t),[r,-1,1]],[parametric,r*cos(t/r^2),r*sin(t/r^2),[r,1,3]],
[parametric,r*cos(t/r^2),r*sin(t/r^2),[r,-3,-1]]],t=10),[gnuplot_preamble,"set size ratio -1"],[x,-3,3],[y,-3,3])$
```

sous Maxima.

- Et donc les zones de concentration 0 et 1 sont de plus en plus proches l'une de l'autre sans pour autant jamais se confondre. Il faut ajouter la diffusion pour cela.

Diffusion – 0

- Dans la leçon no 1, on a vu que le mécanisme explicateur de la diffusion était le mouvement erratique des particules entre la gauche et la droite (en 1D). C'est la même chose pour la dimension 3 à ceci près que les particules ont un mouvement en 3D.

- On appelle ce mouvement erratique le mouvement brownien et, la loi de Stokes-Einstein donne le lien entre le coefficient de frottement visqueux individuel de chaque particule et la diffusivité α (en m^2/s) de la concentration continue c qui représente la répartition des particules. Cette concentration c satisfait à l'équation de diffusion

$$\alpha\,\Delta\,(c) - \partial_t c = 0$$

- Cette équation peut encore s'écrire

$$\partial_t c \;+\; \vec{\nabla}\cdot\vec{\Phi} = 0$$

où $\vec{\Phi} = -\alpha\,\vec{\nabla} c$ s'appelle le flux diffusif.

Diffusion – 1

▶ Une solution emblématique de l'équation de diffusion (sur tout l'espace) est, pour $t > 0$,

$$c = e^{-\frac{|\vec{x}|^2}{4\,\alpha\,t}} \;/\; 8\,(\alpha\,\pi\,t)^{\left(\frac{3}{2}\right)}$$

on a déjà $\int_{E_3} c\;dV = 1$ et donc la quantité totale qui est répartie dans tout l'espace est constante.

Ensuite, la quantité dans la boule de rayon R (de centre $\vec{0}$) est

$$Q = \int_{|\vec{x}|<R} c\;dV = \mathrm{erf}\left(\frac{R}{2\,\sqrt{\alpha\,t}}\right) - \frac{R}{\sqrt{\alpha\,t}\,\sqrt{\pi}}\;e^{-\frac{R^2}{4\,\alpha\,t}}$$

on voit qu'elle ne dépend que du groupement $\frac{R}{\sqrt{\alpha\,t}}$ et donc, par exemple, le rayon $R(t)$ de la boule contenenant une quantité $Q = Q_0$ fixée varie en $\sqrt{\alpha\,t}$.
Ce genre de dépendance entre distances et temps en racine du temps est caractéristique de la diffusion.

Diffusion – 2

- L'avantage qu'il y a à considérer l'équation de diffusion sous la forme

$$\partial_t c \ + \ \vec{\nabla}\cdot\vec{\Phi} = 0 \ \text{ avec } \ \vec{\Phi} = -\alpha\,\vec{\nabla} c$$

est que la densité de flux diffusif, $\vec{\Phi}$ permet de voir que, une surface S (orientable) étant donnée et dotée d'un champ de normales $\vec{n}$, la quantité qui traverse la surface S par unité de temps est

$$\Phi = \int_S \vec{\Phi}\cdot\vec{n}\, dS$$

- Ça permet notamment d'identifier la condition aux limites d'imperméabilité de paroi. Si la diffusion se produit dans un domaine D bordé par une paroi imperméable au passage des particules représentées par la concentration c, alors sur toute surface $S \subset \partial D$, $\Phi = 0$. Et donc

$$\vec{\Phi} = -\alpha\,\left(\vec{\nabla} c\cdot\vec{n}\right) = 0 \ \text{ sur } \ \partial D$$

Diffusion – 3

- En terme de vocabulaire, on peut décrire la diffusion par les lois de Fick.

- La première loi de Fick est que la densité de flux est de la forme

$$\vec{\Phi} = -\alpha \, \vec{\nabla} c$$

- La seconde loi de Fick est que la quantité qui quitte un domaine D donné par unité de temps est exactement le flux à travers le bord du domaine D (dont la normale est orientée vers l'extérieur du domaine), soit

$$\frac{d}{dt} \int_D c \; dV \; + \; \int_{\partial D} n \cdot \vec{\Phi} \; dS = 0$$

- Compte tenu que le domaine est quelconque, ces deux lois sont équivalentes à l'équation de diffusion. Avec cependant le supplément de sens physique qu'apporte la considération de la densité de flux.

Advection/diffusion – 0

- L'advection se résume à considérer que la concentration c évolue comme

$$\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\Phi} + \partial_t c\right) = 0 \ \text{ avec } \ \vec{\Phi} = c\ \vec{v}$$

où $\vec{v}$ est un champ de vitesse donné.

- Pour la diffusion, c'est

$$\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\Phi} + \partial_t c\right) = 0 \ \text{ avec } \ \vec{\Phi} = -\alpha\ \vec{\nabla} c$$

où α, la diffusivité, est un coefficient donné.

- Le cumul de l'advection et de la diffusion consiste alors à ajouter les effets dus à l'advection et la diffusion pour obtenir

$$\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\Phi} + \partial_t c\right) = 0 \ \text{ avec } \ \vec{\Phi} = c\ \vec{v} - \alpha\ \vec{\nabla} c$$

et donc

$$\vec{\nabla}\cdot(c\ \vec{v}) + \partial_t c - \vec{\nabla}\cdot\left(\alpha\ \vec{\nabla} c\right) = 0$$

Advection/diffusion – 1

- On a considéré jusqu'ici que la concentration d'une seule espèce, mais il peut y avoir coexistence de plusieurs espèces. Disons qu'il y a les espèces A, B et C de concentrations respectives $c_A,\ c_B,\ c_C$

- Si les espèces ne réagissent pas entre elles, chacune de ces concentrations évolue sous l'effet d'une équation d'advection/diffusion comme ($X \in \{A, B, C\}$)

$$\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\Phi}_X + \frac{\partial c_X}{\partial t}\right) = 0 \ \text{ avec } \ \vec{\Phi}_X = c_X\ \vec{v} - \alpha_X\ \vec{\nabla} c_X$$

(même vitesse $\vec{v}$ mais des diffusivités différentes).

- Mais ce n'est plus le cas s'il y a une réaction chimique comme $A + B \longrightarrow C$. Celle-ci fait disparaître les espèces A et B au profit de C. Et cette situation n'est pas prise en compte par les équations d'advection/diffusion qui ne traduisent que le transport des espèces.

Advection/diffusion – 2

- Cette réaction chimique peut être prise en compte en ajoutant aux équations d'advection/diffusion des espèces des termes source comme

$$\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\Phi}_X + \frac{\partial c_X}{\partial t}\right) = \Theta_X \quad \text{avec} \quad \vec{\Phi}_X = c_X\,\vec{v} - \alpha_X\,\vec{\nabla} c_X$$

où les $\Theta_A, \Theta_B, \Theta_C$ sont des fonctions dépendant des concentrations c_A, c_b, c_C qui doivent être trouvées à partir des relations de cinétique chimique de la réaction.

- Il serait prématuré de traiter ce genre de situations. Par contre, l'existence de celles-ci suggère d'ajouter à l'équation d'advection/diffusion un terme source $\Theta\left(\vec{x}, t\right)$ générique pour son étude globale. C'est à dire de considérer

$$\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\Phi} + \partial_t c\right) = \Theta \quad \text{avec} \quad \vec{\Phi} = c\,\vec{v} - \alpha\,\vec{\nabla} c$$

Conditions aux limites – 0

► Comme on l'a déjà signalé pour la diffusion seule, l'advection/diffusion (avec source) se produit dans un domaine D de bord ∂D et il convient alors de préciser les conditions aux limites qui peuvent traduire diverses situations.

► Tout d'abord, dans le cas où le domaine D est un contenant qui est imperméable au fluide dans lequel se produit le transport des particules (représentées par la concentration c), on a nécessairement

$$n \cdot \vec{v} = 0 \ \text{ sur } \ \partial D$$

et donc

$$\vec{\Phi} = -\alpha \, \vec{\nabla} c \ \text{ sur } \ \partial D$$

Les particules peuvent entrer ou sortir par ∂D (cf. exercice No 1 des fondamentaux) mais alors ce n'est pas par transport advectif.

Conditions aux limites – 1

- Si $S \subset D$ est une portion de ∂D, les conditions aux limites standards sont sur S
  - la condition de Dirichlet $c = c_S$ où $c_S \; : \; S \longrightarrow \mathbb{R}$;
  - la condition de Neumann $-\alpha \left(\vec{\nabla} c \cdot \vec{n}\right) = \Phi_S$ où $\Phi_S \; : \; S \longrightarrow \mathbb{R}$;
  - la condition de Robin $-\alpha \left(\vec{\nabla} c \cdot \vec{n}\right) = h_S \, c$ où $h \; : \; S \longrightarrow \mathbb{R}$;

- Bien sûr, il peut y avoir une condition d'un type sur une portion de ∂D et d'un autre type sur une autre portion.
Et le choix de la condition aux limites adaptée dépend du problème particulier traité.

Conditions aux limites – 2

- La condition de Robin combinée avec celle de Neummann permet d'unifier l'ensemble des conditions aux limites founies précédemment.

- En effet, si on considère (sur S)

$$-\alpha \left(\vec{\nabla} c \cdot \vec{n}\right) = \Phi_S + h_S \, c$$

alors

- $h_S = 0$ fournit la condition de Neumann seule ;
- $\Phi_S = -h_S \, c_S$ et $h_S \to \infty$ revient à la condition de Dirichlet $c = C_s$.
  En effet, sauf éventuellement pendant des instants très courts, la densité de flux $\vec{\Phi} = -\alpha \left(\vec{\nabla} c \cdot \vec{n}\right)$ est finie et cela n'arrive que si $c \to C_s$.
  On peut d'ailleurs considérer qu'en général le cas de la condition de Dirichlet correspond à cette limite.

Le système au complet

- Un problème complet consiste en la recherche de c solution de

$$\begin{cases} \partial_t c + \vec{\nabla} \cdot (c\ \vec{v}) - \vec{\nabla} \cdot (\alpha\ \vec{\nabla} c) = \theta & \text{dans } D \\ c(t=0, \vec{x}) = c_0(\vec{x}) & \text{dans } D \\ c = c_\partial & \text{sur } \partial D_D \\ -\alpha\ \partial_n c = \Phi_\partial + h\ c & \text{sur } \partial D_{NR} \end{cases}$$

où les fonctions de support D

$$\begin{array}{ccccccccccc} \alpha & : & E_3 & \longrightarrow & \mathbb{R}(m^2/s) & ; & c_0 & : & E_3 & \longrightarrow & \mathbb{R}(\mathfrak{U}/m^3) \\ \vec{v} & : & E_3 & \longrightarrow & E_3(m/s) & ; & \theta & : & E_3 & \longrightarrow & \mathbb{R}(\mathfrak{U}/(m^3\ s)) \end{array}$$

et celles de support ∂D_D ou ∂D_{NR} $(\partial D = \partial D_D + \partial D_{NR})$

$$\begin{array}{ccccc} \Phi_\partial & : & \mathbb{R} \times \partial D_{NR} & \longrightarrow & \mathbb{R}(\mathfrak{U}/(m^2\ s)) \\ h & : & \mathbb{R} \times \partial D_{NR} & \longrightarrow & \mathbb{R}(\mathfrak{U}\ m/s) \\ c_\partial & : & \mathbb{R} \times \partial D_D & \longrightarrow & \mathbb{R}(\mathfrak{U}/m^3) \end{array}$$

sont des données.

Mathématique et physique

- Les questions mathématiques sont
  1. connaître les propriétés minimales que doivent posséder les données pour qu'il existe une solution unique au système complet ;
  2. ces propriétés étant avérées, identifier des méthodes permettant la résolution effective.

- Les questions physiques et techniques sont
  1. identifier les situations qui relèvent de ce système ;
  2. utiliser les solutions du système pour prévoir l'évolution de ces situations.

Il y a *a priori* complémentarité entre les deux approches...

Le problème stationnaire

- Le régime stationnaire est celui qui est atteint quand la solution ne dépend plus du temps. Reste à savoir si ce régime stationnaire existe.
- S'il existe alors la densité atteinte est
$c_\infty \quad : \quad E_3 \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}(\mathfrak{U}/m^3)$ solution de

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot (c_\infty \; \vec{v}) - \vec{\nabla} \cdot (\alpha \; \vec{\nabla} c_\infty) = \theta & \text{dans } D \\ c_\infty = c_\partial & \text{sur } \partial D_D \\ -\alpha \; \partial_n c_\infty = \Phi_\partial + h \; c_\infty & \text{sur } \partial D_{NR} \end{cases}$$

ce qui suppose dejà que α, θ, $\vec{v}$, c_∂, Φ_∂ et h ne dépendent pas du temps.
- Ensuite en introduisant $c_T = c - c_\infty$ solution de

$$\begin{cases} \partial_t c_T + \vec{\nabla} \cdot (c_T \; \vec{v}) - \vec{\nabla} \cdot (\alpha \; \vec{\nabla} c_T) = 0 & \text{dans } D \\ c_T(t = 0, \vec{x}) = c_0(\vec{x}) - c_\infty(\vec{x}) & \text{dans } D \\ c_T = 0 & \text{sur } \partial D_D \\ -\alpha \; \partial_n c_T = h \; c_T & \text{sur } \partial D_{NR} \end{cases}$$

il faut que $\lim_{t \longrightarrow \infty} c_T = 0$.

Le problème stationnaire

- Le résultat se montre en multipliant par c_T l'équation de volume

$$\partial_t c_T + \vec{\nabla} \cdot (c_T\ \vec{v}) - \vec{\nabla} \cdot (\alpha\ \vec{\nabla} c_T) = 0 \text{ dans } D$$

cela donne (après avoir un peu arrangé les termes avec les formules d'analyse vectorielle)

$$\partial_t \left(\frac{c_T^2}{2}\right) + \vec{\nabla} \cdot (c_T^2\ \vec{v}) - \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{c_T^2}{2}\ \vec{v}\right) + \frac{c_T^2}{2}\ \vec{\nabla} \cdot \vec{v} - \vec{\nabla} \cdot \left(\alpha\ \vec{\nabla}\left(\frac{c_T^2}{2}\right)\right)$$
$$+\alpha\ \left(\vec{\nabla} c_T\right)^2 = 0$$

- L'intégration sur D de cette relation fournit alors

$$\frac{d}{dt}\int_D \frac{c_T^2}{2}\ d\vec{x}^2 = -\int_{\partial D_{NR}} h\ c_T^2\ d\vec{x}^2 - \int_D \alpha\ \left(\vec{\nabla} c_T\right)^2 - \int_D \frac{c_T^2}{2}\ \vec{\nabla} \cdot \vec{v}\ d\vec{x}^2$$

où on voit que si $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$, $\alpha > 0$, $h > 0$, la grandeur positive $\int_D \frac{c_T^2}{2}\ d\vec{x}^2$ est décroissante dès lors que c_T n'est pas nul. On conclut que c_T finit par s'annuler.

Conduction

- Si $\vec{v} = \vec{0}$ dans D, le problème stationnaire ($\alpha > 0$ et $h > 0$)

$$\left\{\begin{array}{ll} \vec{\nabla} \cdot (\alpha\, \vec{\nabla} c_\infty) + \theta = 0 & \text{dans } D \\ c_\infty = c_\partial & \text{sur } \partial D_D \\ -\alpha\, \partial_n c_\infty = \Phi_\partial + h\, c_\infty & \text{sur } \partial D_{NR} \end{array}\right.$$

s'appelle un problème de conduction.

- Si α est uniforme, ce problème peut se réécrire

$$\left\{\begin{array}{ll} \Delta c_\infty + \theta/\alpha = 0 & \text{dans } D \\ c_\infty = c_\partial & \text{sur } \partial D_D \\ -\partial_n c_\infty = \Phi_\partial/\alpha + h/\alpha\, c_\infty & \text{sur } \partial D_{NR} \end{array}\right.$$

où $\Delta c_\infty = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} c_\infty)$ est le laplacien. Le problème s'appelle alors un *problème de Poisson*, si $\theta = 0$ c'est un *problème de Laplace*.

- Les problèmes de conduction n'ont pas nécessairement de solutions analytiques mais les solutions numériques ne sont pas difficiles à obtenir.

Advection et diffusion stationnaire

- Le problème d'advection-diffusion stationnaire consiste à chercher c_∞ solution de (avec $\vec{v}\cdot\vec{n} = 0$ sur ∂D)

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot(\alpha\,\vec{\nabla} c_\infty) - \vec{\nabla}\cdot(c_\infty\,\vec{v}) + \theta = 0 & \text{dans } D \\ c_\infty = c_\partial & \text{sur } \partial D_D \\ -\alpha\,\partial_n c_\infty = \Phi_\partial + h\,c_\infty & \text{sur } \partial D_{NR} \end{cases}$$

- Il est intéressant de connaître la solution d'un problème unidirectionel particulier, soit

$$D = \{z\,\vec{k}_z + r\,\vec{k}_r\} \text{ pour } 0 < z < L \text{ et } 0 < r < R$$

dans le cas où

$$\partial D_D = \partial D_0 + \partial D_L \text{ avec } D_0, D_L \text{ les bases du cylindre}$$
$$\partial D_0 = \{r\,\vec{k}_r\} \text{ et } \partial D_L = \{r\,\vec{k}_r + L\,\vec{k}_z\} \text{ pour } 0 < r < R$$

$$c_\infty = c_0 \text{ et } c_L \text{ (uniformes) sur } \partial D_0 \text{ et } c_L$$
$$h = 0, \Phi_\partial = 0 \;\text{ sur } \partial D_l = \{R\,\vec{k}_r\} \text{ le bord latéral } \;\subset \partial D_{NR}$$

et finalement pour α uniforme, $\theta = 0$ et $\vec{v} = v\,\vec{k}_z$

Advection et diffusion stationnaire dans le cas 1D

- Dans ce cas, c_∞ ne dépend ni de x, ni de y et donc l'équation d'advection-diffusion se réduit à

$$\alpha \frac{dc_\infty}{dz^2} - v \ \frac{dc_\infty}{dz} = 0$$

dont la solution est

$$c_\infty = c_0 \ \frac{\exp^{L/\delta} - \exp^{z/\delta}}{\exp^{L/\delta} - 1} + c_L \ \frac{\exp^{z/\delta} - 1}{\exp^{L/\delta} - 1} \ \text{ avec } \delta = \frac{\alpha}{v}$$

- δ est à comparer avec L : si $\delta >> L$, alors

$$\text{pour } 0 < z < L \ : \ c_\infty \approx c_0 \ \frac{L - z}{L} b + c_L \ \frac{z}{L}$$

qui est la solution pour $v = 0$: c'est la conduction qui domine.
Si, au contraire $L >> \delta$, la solution est

$$c_\infty \approx c_0 + (c_L - c_0) \exp^{(z-L)/\delta} \ (c_\infty \approx c_0 \text{ si } z < L - \delta)$$

c'est l'advection qui domine.

Nombre de Peclet

- Le cas 1D met en évidence l'importance du facteur $\dfrac{L}{\delta} = \dfrac{L\, v}{\alpha}$
- Cette importance demeure dans les autres cas, aussi introduit-on le nombre de Peclet
$$Pe = \frac{L\,|\vec{v}|}{\alpha}$$
où L est une longueur un peu mystérieuse qu'on appelle la « dimension caractéristique » et qui représente l'ordre de grandeur des longueurs dans le domaine D. Si ce nombre est supérieur à 1, l'advection domine, s'il est très inférieur à 1 c'est la conduction qui domine.
- Comme α et $\vec{v}$ varient *a priori* dans D il peut y avoir des zones de D où l'advection domine alors que ce sera la conduction dans d'autres.

- On voit donc qu'il est possible de construire des situations où la considération des valeurs du nombre de Peclet pose plus de problèmes qu'elle n'en résout ; mais dans les situations simples ces considérations peuvent être utiles.

Une application simple du cas 1D

- On fait couler de l'eau pure par un jet (assimilable à un tuyau à section circulaire de rayon R dans lequel la vitesse v est uniforme) dans une mare polluée par une espèce dont la diffusivité est α. La concentration de l'espèce dans la mare est c_0 uniforme.

- La question est de savoir quelle est la concentration dans le jet d'eau en régime stationnaire.

- En reprenant ce qui précède, c'est

$$c_0 \; e^{-\frac{v \, z}{\alpha}}$$

où z représente la hauteur dans le jet à partir de la surface de la mare.

- Et donc, si le jet est issu d'un réservoir et qu'on le considère comme pollué si la concentration dépasse $c_0/100$ en l'un de ses points (le point de départ du jet), il faut que la longueur du jet soit plus grande que $\ln(100) * \alpha/v = 4.6 * \alpha/v$.

Équation de sédimentation

- L'équation de sédimentation modélise le dépot de particules dans un milieu par ailleurs immobile, elle a la forme d'une équation d'advection-diffusion, soit dans un domaine D donné

$$\partial_t c + \vec{\nabla} \cdot (c\ \vec{v}) - \vec{\nabla} \cdot (\alpha\ \vec{\nabla} c) = \theta$$

où c est la concentration de particules, α la diffusivité de celles-ci, θ un terme de production (ou consommation) volumique des particules.

- $\vec{v}$ n'est par contre pas une vraie vitesse mais plutôt une vitesse moyenne obtenue par des considérations sur les forces qui s'exercent sur les particules. Si ces forces sont celles de la pesanteur de champ $-g\ \vec{k}_z$,

$$\vec{v} = -s\ g\ \vec{k}_z$$

où s est un coefficient appelé le coefficient de sédimentation.
- Le coefficient s peut être obtenu par des considérations théoriques qui ne seront pas développées dans cette leçon.

Équation de sédimentation

- Cette vitesse $\vec{v}$ n'a pas la propriété qui a été utilisée jusqu'ici que $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ sur ∂D ; aussi les conditions aux limites de type Neumann-Robin sont-elle modifiées pour prendre en compte que le flux de particules est à la fois diffusif et advectif. La condition d'imperméabilité d'une paroi ∂D_{NR} d'écrit

$$-\alpha \partial_n c + c \ \vec{v} \cdot \vec{n} = 0$$

et ce sera la seule condition utilisée ici, avec cependant également celle de Dirichlet

$$c = c_\partial \text{ sur } \partial D_D$$

pour prendre en compte le fait qu'on peut connaître la concentration de particules en certain endroits.

- L'équation de sédimentation mériterait plus de développements, mais on l'introduit ici juste pour donner des exemples simples d'équation d'advection-diffusion.