Équations macroscopiques de la physique classique

Leçon 5

Fluides

G. Vinsard

Gerard.Vinsard@univ-lorraine.fr

22 février 2023

Objectifs

- Un fluide est un assemblage de matière qui peut être déformé sans grands efforts. Les deux exemples (emblématiques) de fluides sont l'eau (peu compressible) et l'air (compressible). Le fluide peut rester globalement immobile ou s'écouler selon les forces qui agissent dessus.

- Le modèle physique qui décrit ces phénomènes introduit les tenseurs de vitesse de déformation et de contraintes. Ce dernier permettant de décrire ce qu'on appelle la pression et la viscosité.

- On propose ici d'introduire ces tenseurs à partir des fluides newtoniens peu compressibles (les fluides qui s'écoulent comme de l'eau, la viscosité étant à peu près constante).

- Le cas des fluides non-newtoniens (la plupart des fluides alimentaires) qui correspond aux fluides comme , n'est pas traité. Et celui des gaz juste esquissé.

- La question des conditions aux limites est elle aussi juste esquissée. Notamment le phénomène de tension superficielle n'est pas traité.

- Cette leçon a en fait pour objectif de construire l'équation de Navier-Stokes. L'exploitation de celle-ci sera faite dans une leçon ultérieur.

Statique des fluides – 1

- La condition nécessaire pour qu'un fluide contenu dans un domaine borné $D \subset E_3$ et soumis à une densité de force

$$\begin{array}{rcccl} \vec{f} & : & D & \longrightarrow & E_3(N/m^3) \\ & & \vec{x} & \longrightarrow & \vec{f}(\vec{x}) \end{array}$$

soit en équilibre, i.e. ne bouge pas, est que cette densité de force soit potentielle, c'est à dire de la forme

$$\vec{f} = \vec{\nabla} P$$

où P, le champ de pression $\begin{array}{rcccl} P & : & D & \longrightarrow & \mathbb{R}(Pa) \\ & & \vec{x} & \longrightarrow & P(\vec{x}) \end{array}$ permet de rendre compte de la force que le fluide exerce sur lui-même.

- Ce qui signifie que il n'y a équilibre dans le fluide que si la densité de force appliquée $\vec{f}$ est potentielle, i.e. $\exists\, \varphi \ : \ \vec{f} = -\vec{\nabla}\varphi$; et alors la pression est

$$P = -\varphi + \text{ Constante dans } D$$

Statique des fluides – 2 : Démonstration de Clairaut

- Un fluide en équilibre n'est sujet à aucun mouvement ; et donc il est possible d'imaginer que une partie de celui-ci est « gelée » de manière à l'isoler de l'autre partie qui elle reste liquide.

- De cette façon on gèle tout le fluide, à l'exception d'un tube de très faible section fermé sur lui-même ;

- Ce tube ne sera immobile que si la circulation de la densité de forces $\vec{f}$ appliquée le long de sa courbe moyenne est nulle ;

- Et donc il faut que pour tout chemin Γ fermé sur lui-même

$$\int_\Gamma \vec{f}\, dl = 0$$

- Cela n'est possible que si $\vec{f}$ est le gradient d'une fonction qu'on appelle la pression

$$\vec{f} = \vec{\nabla} P$$

Statique des fluides – 3 : force sur un domaine $\delta D \subset D$

- La force qui s'exerce sur le domaine $\delta D \subset D$ est alors

$$\delta \vec{F} = \int_{\delta D} \vec{\nabla} P \, d\vec{x}^3$$

Cette quantité est une intégrale de volume, mais un calcul permet de l'exprimer comme intégrale de surface sur le bord $\partial \delta D$ (de normale extérieure $\vec{n}$) de D

$$\delta \vec{F} = \int_{\partial \delta D} P \; \vec{n} \, d\vec{x}^2$$

Et donc, pour que δD puisse être immobile, elle doit être compensée par une densité surfacique de forces exercée sur $\partial \delta D$, soit

$$\vec{f}_\partial = -P \; \vec{n}$$

de manière que

$$\delta \vec{F} + \int_{\partial \delta D} \vec{f}_\partial \, d\vec{x}^2 = 0$$

Statique – 4 : Compensation des efforts intérieur du fluide

► Deux sous-domaines δD_1 et δD_2 en contact l'un avec l'autre par la surface $\delta\Gamma$ avec

$$\delta\Gamma \subset \partial\delta D_1 \text{ et } \delta\Gamma \subset \partial\delta D_2$$

exercent l'un sur l'autre les forces de densité surfaciques sur $\delta\Gamma$

$$\begin{array}{lll} -P\ \vec{n}_1 & ; & \text{force exercée par } \delta D_2 \text{ sur } \delta D_1 \\ -P\ \vec{n}_2 & ; & \text{force exercée par } \delta D_1 \text{ sur } \delta D_2 \end{array}$$

où $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont les normales à $\delta\Gamma$ sortante de δD_1 et sortante de δD_2.

► Donc pour toute position sur $\delta\Gamma$: $\vec{n}_1 = -\vec{n}_2 \Rightarrow$ les densités de forces se compensent

$$-P\ \vec{n}_1 - P\ \vec{n}_2 = \vec{0}$$

► Le raisonnement peut être reconduit partout et il amène à la conclusion que *les efforts intérieurs du fluide* se compensent.

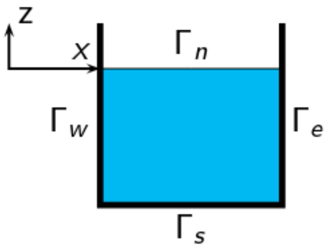
Statique – 5 : densité de force sur ∂D

- Si une partie du bord $\partial\delta D$, disons $\delta\partial D$, est commune avec ∂D, le bord de D, alors la densité surfacique de forces

$$\vec{f}_\partial = -P\ \vec{n} \text{ sur } \delta\partial D$$

qui participe à l'équilibre de δD ne peut être fournie comme précédemment par le fluide lui-même. C'est donc le milieu qui limite le fluide qui doit l'assurer.

- Typiquement



$$\partial D = \Gamma_s + \Gamma_e + \Gamma_n + \Gamma_w$$

$$P = P_0 - \rho\ g\ z$$

$$\vec{f}_\partial = \begin{cases} -P_0\ \vec{k}_z & \text{sur} \quad \Gamma_n \\ -P\ \vec{k}_x & \quad\quad \Gamma_e \\ P\ \vec{k}_z & \quad\quad \Gamma_s \\ P\ \vec{k}_x & \quad\quad \Gamma_w \end{cases}$$

Statique – 6 : Compensation des couples

- La densité de forces de volume $\vec{\nabla} P$ dans un domaine $\forall\ \delta D$ est compensée par la densité superficielle de force $-P\vec{n}$ sur $\partial\delta D$, soit

$$\int_{\delta D} \vec{\nabla} P \, d\vec{x}^3 + \int_{\partial\delta D} -P\ \vec{n}\, d\vec{x}^2 = 0$$

- Mais pour l'équilibre il faut encore que les densités de couples se compense également, soit

$$\int_{\delta D} \vec{x} \times \vec{\nabla} P \, d\vec{x}^3 + \int_{\partial\delta D} \vec{x} \times (-P\ \vec{n})\, d\vec{x}^2 = 0$$

où le produit vectoriel est noté « $\times$ » : $\vec{x} \times \vec{\nabla} P$ (en N/m^2) est la densité de couple volumique et $\vec{x} \times (-P\vec{n})$ (en N/m) la densité de couple surfacique.

- Un calcul (connexe à celui qui fait intervenir la formule de Green-Ostrogradski) conclut que cela arrive pour toute pression ; et donc les couples volumiques et surfaciques se compensent.

Statique – 7 : Dérivation plus moderne

- Dès lors qu'on s'est approprié la notion de tenseur des contraintes, il est possible de procéder plus rapidement.

- Le fluide est soumis à l'action des forces de volume $\vec{f}$ décrites planche 3 ; ces forces de volume sont compensées par un tenseur des contraintes, soit

$$\vec{f} + \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}} = 0$$

ce qui assure l'équilibre de chacune des « particules fluides » (c'est comme cela qu'on appelle les petits domaines ∂D).

- Toute la question est de donner une forme au tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$. Dans le cas de la statique, c'est

$$\underline{\underline{\sigma}} = -P \, \underline{\underline{Id}} \Longrightarrow \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}} = -\vec{\nabla} P$$

parce qu'on considère que le cas statique est celui de l'isotropie totale de ce tenseur.

- Et alors toutes les propriétés précédentes sont implicitement vérifiées.

Cinématique – 1

► Le fluide est supposé remplir complétement un récipient qui occupe un domaine $D \subset E_3$. Le mouvement du fluide est alors décrit par une fonction

$$\begin{array}{cccc} \vec{\Xi} & : & \mathbb{R} \times D & \longrightarrow & E_3 \\ & & (t, \vec{x}) & \longrightarrow & \vec{\Xi}\,(t, \vec{x}) \end{array}$$

qui, à chaque instant t, est un difféomorphisme de D dans D et telle que

$$\vec{\Xi}\,(0, \vec{x}) = \vec{x}$$

► Un petit domaine $\delta D\,(0)$ autour de $\vec{x}$ se retrouvera alors à l'instant t en $\delta D\,(t)$ tel que

$$\delta D\,(t) = \vec{\Xi}\,(t, \delta D\,(0))$$

Cinématique – 2

- Initialement, la masse du fluide est distribuée dans D par la densité volumique

$$\begin{array}{rcccl} \rho_0 & : & D & \longrightarrow & \mathbb{R}\left(kg/\ m^3\right) \\ & & \vec{x} & \longrightarrow & \rho_0\left(\vec{x}\right) \end{array}$$

- Cette densité évolue avec le temps et donc, à l'instant t est un champ de scalaire

$$\begin{array}{rcccl} \rho & : & \mathbb{R}\times D & \longrightarrow & \mathbb{R}\left(kg/\ m^3\right) \\ & & \left(t,\vec{x}\right) & \longrightarrow & \rho\left(t,\vec{x}\right) \end{array}$$

- La relation entre ρ_0 et ρ est fixée en considérant que la masse enclose dans le petit domaine $\delta D\left(0\right)$ (à l'instant $t=0$) est exactement celle qui est enclose dans le petit domaine $\delta D\left(t\right)$ (à l'instant t), soit

$$\int_{\delta D(0)} \rho_0\left(\vec{x}\right)\ dV = \int_{\delta D(t)} \rho\left(t,\vec{x}\right)\ dV$$

Cinématique – 3

- Si on fait le changement de variables $\vec{x} = \vec{\Xi}(t, \vec{y})$ dans $\int_{\delta D(t)} \rho(t, \vec{x})\ dV$, on obtient

$$\int_{\delta D(t)} \rho(t, \vec{x})\ dV = \int_{\delta D(0)} \rho(t, \vec{y})\ det\left(\underline{\underline{\nabla}}\left(\vec{\Xi}(t, \vec{y})\right)\right)\ dV$$

d'où

$$\int_{\delta D(0)} \rho_0(\vec{x})\ dV = \int_{\delta D(0)} \rho(t, \vec{y})\ det\left(\underline{\underline{\nabla}}\left(\vec{\Xi}(t, \vec{y})\right)\right)\ dV$$

et donc, en renommant $\vec{x}$ la variable muette $\vec{y}$ et en considérant que la relation est valable quel que soit le domaine $\delta D(0)$,

$$\rho\left(t, \vec{\Xi}(t, \vec{x})\right)\ det\left(\underline{\underline{\nabla}}\left(\vec{\Xi}(t, \vec{x})\right)\right) = \rho_0(\vec{x})$$

qui est la relation cherchée entre ρ et ρ_0.

Cinématique – 4

- D'autre part, la vitesse du point initialement en $\vec{x}$ et qui se retrouve en $\vec{\Xi}(t,\vec{x})$ est $\partial_t \vec{\Xi}(t,\vec{x})$

- Pour relier cette vitesse à la position $\vec{\Xi}(t,\vec{x})$ et à l'instant t, on introduit le champ de vitesses

$$\begin{array}{cccll} \vec{v} & : & \mathbb{R} \times D & \longrightarrow & E_3\,(m/s) \\ & & (t,\vec{x}) & \longrightarrow & \vec{v}\,(t,\vec{x}) \quad \text{avec} \quad \vec{v}\left(t, \vec{\Xi}\,(t,\vec{x})\right) = \partial_t \vec{\Xi}\,(t,\vec{x}) \end{array}$$

qui s'appelle le champ de vitesses eulérien.

- L'accélération du point initialement en $\vec{x}$ est $\partial^2_{t^2} \vec{\Xi}(t,\vec{x})$ et un calcul direct amène à la relation

$$\partial^2_{t^2} \vec{\Xi}\,(t,\vec{x}) = \partial_t \vec{v}\left(t, \vec{\Xi}\,(t,\vec{x})\right) + \underline{\underline{\nabla}}\vec{v}\left(t, \vec{\Xi}\,(t,\vec{x})\right)\ \vec{v}\left(t, \vec{\Xi}\,(t,\vec{x})\right)$$

(qui fournit l'accélération du point qui se trouve à la position $\vec{\Xi}(t,\vec{x})$ et à l'instant t.)

Cinématique – 5

- Le champ eulérien des accélérations est alors

$$\begin{array}{cccc} \vec{\gamma} & : & \mathbb{R} \times D & \longrightarrow & E_3\left(m/s\right) \\ & & \left(t, \vec{x}\right) & \longrightarrow & \vec{\gamma}\left(t, \vec{x}\right) \end{array}$$

avec $\vec{\gamma}\left(t, \vec{\Xi}\left(t, \vec{x}\right)\right) = \partial_t \vec{v}\left(t, \vec{\Xi}\left(t, \vec{x}\right)\right) + \underline{\underline{\nabla}} \vec{v}\left(t, \vec{\Xi}\left(t, \vec{x}\right)\right)\ \vec{v}\left(t, \vec{\Xi}\left(t, \vec{x}\right)\right)$

- On utilise quelque fois la notation

$$\frac{D\ \vec{v}}{Dt} = \partial_t \vec{v} + \underline{\underline{\nabla}} \vec{v}\ \vec{v}$$

qu'on appelle la dérivée particulaire. Et alors on dit que l'accélération du champ de vitesses eulérien $\vec{v}$ est fournie par la dérivée particulaire de ce champ.

Cinématique – 6

- La quantité de mouvement de la masse enclose dans le petit domaine $\delta D\left(t\right)$ (qui est exactement la masse enclose dans $\delta D\left(0\right)$ à l'instant $t=0$) est

$$\delta p=\int_{\delta D(t)}\rho\left(t,\vec{x}\right)\ \vec{v}\left(t,\vec{x}\right)\ dV$$

Par le changement de variables précédent et en utilisant la relation entre ρ_0 et ρ de la planche 12 ainsi que l'expression de $\vec{v}$ de la planche 11, il vient

$$\delta p=\int_{\delta D(t)}\rho\left(t,\vec{x}\right)\ \vec{v}\left(t,\vec{x}\right)\ dV=\int_{\delta D(0)}\partial_t\vec{\Xi}\left(t,\vec{x}\right)\ \rho_0\left(\vec{x}\right)\ dV$$

- D'où

$$\frac{\partial\delta p}{\partial t}=\int_{\delta D(0)}\partial^2_{t^2}\vec{\Xi}\left(t,\vec{x}\right)\ \rho_0\left(\vec{x}\right)\ dV$$

Cinématique – 7

- Il reste alors à faire le changement de variables inverse et l'expression de l'accélération de la planche 14 pour obtenir

$$\frac{\partial \delta p}{\partial t} = \int_{\delta D(t)} \rho(t, \vec{x}) \left(\partial_t \vec{v}(t, \vec{x}) + \left(\underline{\underline{\nabla}} \vec{v}\ \vec{v} \right)(t, \vec{x}) \right) dV$$

- Ainsi, la force d'inertie qui s'exerce sur la masse située initialement dans le petit domaine $\delta D(0)$ (celle qui est à l'instant t dans le petit domaine $\delta D(t)$) est $-\frac{\partial \delta p}{\partial t}$

- Comme c'est vérifié pour un petit domaine quelconque, la densité de forces d'inertie (en N$/m^3$) est alors

$$-\rho(t, \vec{x}) \left(\partial_t \vec{v}(t, \vec{x}) + \left(\underline{\underline{\nabla}} \vec{v}\ \vec{v} \right)(t, \vec{x}) \right)$$

Dynamique

- On dispose de l'expression de la densité de forces d'inertie $-\rho \ \left(\partial_t \vec{v} + \underline{\underline{\nabla}} \vec{v} \ \vec{v}\right)$ (où on omet maintenant de préciser les arguments $(t, \vec{x})$). Avec le principe de D'Alembert celle-ci est une densité de forces comme une autre.

- En conséquence de quoi on peut, comme en statique, écrire l'équilibre des forces en tous points du domaine D comme

$$\vec{f} + \vec{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}} - \rho \ \left(\partial_t \vec{v} + \underline{\underline{\nabla}} \vec{v} \ \vec{v}\right) = \vec{0}$$

où $\vec{f}$ est une densité de force donnée (typiquement la gravité) et $\underline{\underline{\sigma}}$ le tenseur des contraintes qui prend en compte les forces de contact entre domaines fluides contigus.
On écrira plutôt

$$\rho \ \left(\partial_t \vec{v} + \underline{\underline{\nabla}} \vec{v} \ \vec{v}\right) = \vec{f} + \vec{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}}$$

Le fluide parfait – 1

- Un fluide parfait est un fluide dont on peut rendre compte du mouvement en choisissant

$$\underline{\underline{\sigma}} = -P \; \underline{\underline{Id}}$$

L'équation de son mouvement est alors

$$\rho \; \left(\partial_t \vec{v} + \underline{\underline{\nabla}} \vec{v} \; \vec{v}\right) + \vec{\nabla} P = \vec{f}$$

- Il convient de lui adjoindre la relation de la planche 12

$$\rho \left(t, \vec{\Xi}\,(t, \vec{x})\right) \; det \left(\underline{\underline{\nabla}} \left(\vec{\Xi}\,(t, \vec{x})\right)\right) = \rho_0\,(\vec{x})$$

qui traduit les variations de densité au cours du temps. Mais, contrairement à $\rho \; \left(\partial_t \vec{v} + \underline{\underline{\nabla}} \vec{v} \; \vec{v}\right) + \vec{\nabla} P = \vec{f}$, elle fait référence à la fonction $\vec{\Xi}$ et n'est guère commode à utiliser.
Il convient donc de la retravailler.

Le fluide parfait – 2

- la dérivée de $\rho\left(t, \vec{\Xi}(t,\vec{x})\right)\ det\left(\underline{\underline{\nabla}}\left(\vec{\Xi}(t,\vec{x})\right)\right) = \rho_0(\vec{x})$ est nulle, soit (en omettant les arguments)

$$\left(\vec{\nabla}\rho\cdot\partial_t\vec{\Xi}+\partial_t\rho\right)\ det\left(\underline{\underline{\nabla}}\vec{\Xi}\right)+\rho\,\frac{d}{dt}\left(\ det\left(\underline{\underline{\nabla}}\vec{\Xi}\right)\ \right)=0$$

On a, bien sûr, $\partial_t\vec{\Xi}(t,\vec{x}) = \vec{v}\left(t,\vec{\Xi}(t,\vec{x})\right)$ mais il faut travailler un peu plus (en annexe) pour obtenir que

$$\frac{d}{dt}\left(\ det\left(\underline{\underline{\nabla}}\vec{\Xi}\right)\ \right)=det\left(\underline{\underline{\nabla}}\vec{\Xi}\right)\ Trace\left(\underline{\underline{\nabla}}\left(\partial_t\vec{\Xi}\right)\ \underline{\underline{\nabla}}\vec{\Xi}^{-1}\right)$$

Et comme $Trace\left(\underline{\underline{\nabla}}\left(\partial_t\vec{\Xi}\right)\ \underline{\underline{\nabla}}\vec{\Xi}^{-1}\right)=\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\left(t,\vec{\Xi}(t,\vec{x})\right)$ la première relation s'écrit

$$\vec{\nabla}\rho\cdot\vec{v}+\partial_t\rho+\rho\,\vec{\nabla}\cdot\vec{v}=\ \partial_t\rho\ +\ \vec{\nabla}\cdot(\rho\ \vec{v})\ =\ 0$$

C'est l'équation d'advection de la densité de masse ρ.

Le fluide parfait – 3

▶ En collectant les expressions, on dispose maintenant du modèle eulérien du fluide parfait. C'est

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho\ \left(\partial_t \vec{v} + \underline{\underline{\nabla}}\vec{v}\ \vec{v}\right) + \vec{\nabla} P = \vec{f} \\ \\ \partial_t \rho\ +\ \vec{\nabla}\cdot(\rho\ \vec{v})\ =\ 0 \end{array} \right.$$

qui fournit des équations d'évolution de vitesses, pression et masse volumique dans le fluide.

▶ Si le fluide est compressible, disons un gaz parfait, il est nécessaire d'adjoindre à ces équations d'évolution la loi d'état $P\ V = n\ R\ T$ dans laquelle on fait apparaître la masse volumique par $\rho = \frac{m\ n}{V}$ où m est la masse molaire. Soit

$$P = \frac{R\ T}{m}\ \rho$$

On reviendra là dessus dans la leçon sur les ondes.

Le fluide parfait – 4

- Si le fluide est incompressible, alors $\rho = \rho_0$ et c'est une constante, la relation $\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho\, \vec{v}) = 0$ se réduit alors à $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$

- Et alors le modèle permettant la calcul de l'écoulement d'un fluide parfait est

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho\ \left(\partial_t \vec{v} + \underline{\underline{\nabla}} \vec{v}\ \vec{v}\right) + \vec{\nabla} P = \vec{f} \\ \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \end{array} \right.$$

- Ce modèle demande quelques explications pour être utilisé, celles-ci seront fournies dans une des leçons de la partie Applications.

Les fluides newtoniens – 1

► Un fluide comme l'eau n'est pas parfait. Il comporte un aspect visqueux. L'huile est encore plus visqueuse et pour avoir un exemple vraiment très visqueux on peut penser au miel liquide.

► Pour prendre en compte ce phénomène, il est nécessaire d'introduire au préalable un autre tenseur que le tenseur des contraintes qui est le tenseur des vitesses de déformation. C'est un tenseur qui se déduite du tenseur de déformation (cf. leçon sur l'élasticité) en considérant que le champ de déplacement lorsqu'on passe du temps t au temps $t + \delta t$ est

$$\delta t \ \vec{v}\,(t, \vec{x})$$

Le tenseur de déformation correspondant est alors

$$\frac{1}{2}\ \left({}^{t}\,\underline{\underline{\nabla}}\,(\delta t\ \vec{v}) + \underline{\underline{\nabla}}\,(\delta t\ \vec{v})\right)$$

Les fluides newtoniens – 2

- En divisant ce tenseur des déformations par δt, on obtient le tenseur des vitesses de déformation

$$\underline{\underline{\tau}} = \frac{1}{2}\ \left({}^{t}\,\underline{\underline{\nabla}}\vec{v} + \underline{\underline{\nabla}}\vec{v} \right)$$

Il traduit le taux de déformation par unité de temps que subit un petit domaine.

- S'il est nul, il n'y a pas de déformation, tout domaine se déplace comme un solide. Et dans le cas contraire il y en a une. Et c'est lorsqu'il y a déformation que le phénomène de viscosité apparaît.

- La déformation correspond soit à une dilatation soit à un cisaillement. C'est essentiellement ce dernier mode qui engendre ce qu'on appelle l'effet visqueux. Aussi choisit-on de limiter cette description au cas de l'incompressibilité

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0$$

où seul le cisaillement engendre l'effet visqueux.

Les fluides newtoniens incompressibles – 3

▶ Un fluide newtonien incompressible est un fluide pour lequel la relation (on l'appelle une relation constitutive) entre le tenseur des contraintes et le tenseur des vitesses de déformation est

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2\,\eta\,\underline{\underline{\tau}} - P\,\underline{\underline{Id}}$$

où la pression est présente, comme pour le fluide parfait, et où η est un coefficient caractéristique du fluide appelé la viscosité dynamique (en Pascal seconde (Pa s)).

▶ Il reste alors à introduire cette relation dans l'équation d'équilibre $\rho\,\left(\partial_t \vec{v} + \underline{\underline{\nabla}}\vec{v}\,\vec{v}\right) = \vec{f} + \vec{\nabla}\cdot\underline{\underline{\sigma}}$ (cf. planche 17) pour obtenir

$$\rho\,\left(\partial_t \vec{v} + \underline{\underline{\nabla}}\vec{v}\,\vec{v}\right) + \vec{\nabla} P = \eta\,\vec{\Delta}\left(\vec{v}\right) + \vec{f}$$

qui s'appelle l'équation de Navier-Stokes.

Les fluides newtoniens incompressibles – 5

▶ Le modèle permettant le calcul de l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible est

$$\left\{\begin{array}{l} \rho\ \left(\partial_t\vec{v} + \underline{\underline{\nabla}}\vec{v}\ \vec{v}\right) + \vec{\nabla}P = \eta\ \vec{\Delta}\left(\vec{v}\right) + \vec{f} \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0 \end{array}\right.$$

▶ Si la viscosité $\eta = 0$ on retrouve le cas du fluide parfait incompressible.

▶ Les équations du modèle ne suffisent pas à calculer l'écoulement, il faut leur adjoindre : une condition initiale

$$\vec{v}\left(t = 0, \vec{x}\right) = \vec{v}_0\left(\vec{x}\right)$$

où $\vec{v}_0$, le champ de vitesse initial est une donnée. Et une condition aux limites sur le bord ∂D du domaine D dans lequel on a enfermé d'emblée le fluide.

Les conditions aux limites – 1

- Avant de discuter de ces conditions proprement dit, il n'est pas inutile d'examiner comment les fluides sont contenus en général.

- L'air de l'atmosphère est un fluide qui occupe l'espace entre le sol de la Terre et se raréfie en altitude (la densité de masse diminue) jusqu'à disparaître complétement. C'est une premières situation où le domaine D serait grossièrement l'espace compris entre deux sphères.

- L'eau d'une rivière est un fluide qui occupe un espace pas si facile à décrire littérairement. Néanmoins, toujours grossièrement, une rivière rectiligne occupe un domaine en forme de tronçon de cylindre à section non circulaire.

- L'eau d'une casserole occupe elle un domaine en forme de tronçon de cylindre à section circulaire (et donc axisymétrique). Celle d'un vase à fleur un domaine qui peut être plus compliqué.

- L'eau qui remplit un ballon d'eau est bordée par une membrane élastique et donc déformable.

- Il y a aussi l'eau d'un tuyau rigide ou souple, le pétrole d'un pipe-line, l'eau d'un lac, le miel liquide d'un pot de miel et bien d'autres situation encore. . .

Les conditions aux limites – 2

- L'examen de ces situations met en évidence que les fluides peuvent être en contact avec
  - Un solide rigide (paroi casserole/eau de cuisson) ;
  - Un solide déformable (menbrane d'un ballon d'eau) ;
  - Un autre fluide (surface de contact entre l'eau et l'air)

- Ces deux dernières situations présentent la difficulté que le domaine D qui contient le fluide est déformable. On parle alors de problèmes d'écoulement à frontière libre. on étudiera les écoulements à frontière sous une forme restreinte pour laquelle cette frontière ne bouge pas et donc le domaine D ne se déforme pas..

- Ceci étant précisé, il reste à expliciter la forme des conditions aux limites standards sur les frontières fluide/solide et fluide/fluide (sans déformation de la frontière).

Les conditions aux limites – 3

- Le fluide est supposé enclos dans le domaine D indéformable et supposé immobile. Aucune particule de fluide ne peut sortir du domaine, cela se traduit par la condition que la composante normale de la vitesse d'annule sur le bord du domaine, soit

$$\vec{v} \cdot \vec{n} \text{ sur } \partial D$$

C'est la condition d'imperméabilité.

- La composante tangentielle de la vitesse sur ∂D est

$$\vec{n} \times (\vec{v} \times \vec{n}) = \vec{v} - (\vec{n} \cdot \vec{v}) \ \vec{n}$$

- Si le fluide est visqueux, i.e. $\eta > 0$ et que la matière qui borde le domaine D immobile de manière que l'interface de contact soit $\Gamma \subset \partial D$ est solide, alors cette composante tangentielle s'annule également

$$\vec{n} \times (\vec{v} \times \vec{n}) = \vec{0} \text{ sur } \Gamma$$

Cette condition s'appelle la condition de non-glissement à la paroi.

Les conditions aux limites – 3

- La justification de la condition de non-glissement à la paroi demande une approche plus physique de la viscosité, voir par exemple l'ancienne leçon sur le sujet (p. 26) (lien cliquable).

- Dans le cas d'un fluide visqueux la condition aux limites sur une paroi solide immobile Γ cumule les conditions d'imperméabilité et de non-glissement à la paroi, soit

$$\vec{v} = \vec{0} \;\text{ sur }\; \Gamma$$

- Si maintenant le fluide est non-visqueux (c'est un donc fluide parfait), la condition aux limites sur une paroi solide immobile Γ se limite à la condition d'imperméabilité

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \;\text{ sur }\; \Gamma$$

Les conditions aux limites – 4

- La condition aux limites sur une frontière libre (mais cependant globalement invariante) $\Gamma \subset \partial D$, i.e. l'interface entre le fluide et un autre fluide qui n'est pas miscible avec le premier n'est, en toute généralité, pas vraiment une condition aux limites puisqu'il y a à considérer les écoulements des deux fluides. Dans ce cas on écrit que les vitesses tangentielles (les vitesses normales sont toutes les deux nulles puisque la frontière libre ne bouge pas) des deux fluides coïncident, soit

$$\vec{v}_{|1^\circ \text{ fluide}} = \vec{v}_{|2^\circ \text{ fluide}} \quad \text{sur } \Gamma$$

- Si, cependant le second fluide est très peu visqueux par rapport au premier, la vitesse qu'il aura sur leur interface est imposé par l'écoulement du premier qui en conséquence ne subit aucun effort tangentiel de la part du second. En anticipant un peu sur le calcul des forces, la condition aux limites correspondant à cette situation est

$$\underline{\underline{\sigma}}\,\vec{n} \times \vec{n} = \left(\eta\,\left({}^t\,\underline{\underline{\nabla}}\vec{v} + \underline{\underline{\nabla}}\vec{v}\right) - P\,\vec{n}\right) \times \vec{n} = \eta\,\left({}^t\,\underline{\underline{\nabla}}\vec{v} + \underline{\underline{\nabla}}\vec{v}\right) \times \vec{n} = \vec{0}$$

qui prend des formes bien plus simples dans les cas concrets.

Les conditions aux limites – 5

- Voici donné quelques conditions aux limites standards.

- Mais il y en a encore d'autres correspondant aux écoulements classiques comme l'écoulement de Poiseuille ou celui de Couette qui mettent en œuvre des parois mobiles.

- Dans le cas d'une paroi mobile, la vitesse du fluide à son contact n'est pas nulle mais elle est exactement celle de la paroi.

- Et encore, l'écoulement dans un tuyau (on dit aussi une conduite) est idéalisé par l'écoulement dans un tronçon de ce tuyau. Le tronçonnage introduit des partie de bords supplémentaires constitué par les deux bases du cylindre. On parle alors d'écoulement ouvert pour lesquels la recherche de conditions aux limites sur les parties de bord supplémentaire peut être délicate.

- Ces cas seront examinés en TDs.

Les forces de surface – 1

- L'équation de Navier-Stokes de la planche 24 s'écrit

$$\rho \; \left(\partial_t \vec{v} + \underline{\underline{\nabla}} \vec{v} \; \vec{v}\right) + \vec{\nabla} P = \eta \; \vec{\Delta}\,(\vec{v}) + \vec{f}$$

mais cela vient de

$$\rho \; \left(\partial_t \vec{v} + \underline{\underline{\nabla}} \vec{v} \; \vec{v}\right) = \vec{f} + \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{\sigma}} = \eta \; \left({}^t\,\underline{\underline{\nabla}} \vec{v} + \underline{\underline{\nabla}} \vec{v}\right) - P \; \underline{\underline{Id}}$$

- Compte tenu que $\int_D \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \; dV = \int_{\partial D} \underline{\underline{\sigma}} \; \vec{n} \; dS$, on voit que la densité de forces que le fluide exerce sur le bord de D est

$$\underline{\underline{\sigma}} \; \vec{n} = \eta \; \left({}^t\,\underline{\underline{\nabla}} \vec{v} + \underline{\underline{\nabla}} \vec{v}\right) \; \vec{n} - P \; \vec{n}$$

- Si ce bord est l'interface entre le fluide et un solide immobile, les conditions aux limites sont $\vec{v} = \vec{0}$ sur ∂D et alors, compte tenu que le fluide est incompressible ($\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$), cette condition se réduit à

Annexe : calcul planche 19 – 1

- Il s'agit de montrer que

$$\frac{d}{dt}\left(\, det\left(\underline{\underline{\nabla}}\vec{\vec{\Xi}}\right)\,\right) = det\left(\underline{\underline{\nabla}}\vec{\vec{\Xi}}\right)\ Trace\left(\underline{\underline{\nabla}}\left(\partial_t\vec{\vec{\Xi}}\right)\ \underline{\underline{\nabla}}\vec{\vec{\Xi}}^{-1}\right)$$

- On pourrait le faire plus subtilement mais il me semble plus pédagogique d'utiliser un passage en composantes. Donc

$$\begin{aligned}\vec{\vec{\Xi}}\left(t, z\,\vec{k}_z + y\,\vec{k}_y + x\,\vec{k}_x\right) &= \Xi_x\left(t, x, y, z\right)\ \vec{k}_x \\ &+ \Xi_y\left(t, x, y, z\right)\ \vec{k}_y \\ &+ \Xi_z\left(t, x, y, z\right)\ \vec{k}_z\end{aligned}$$

et (en omettant les dépendances)

$$\underline{\underline{\nabla}}\vec{\vec{\Xi}} = \sum_{(i,j)\in\{x,y,z\}^2} \partial_j\Xi_i\ \left]\vec{k}_i, \vec{k}_j\right[$$

Annexe : calcul planche 19 – 2

- D'où on retire que l'expression de $\vec{\vec{\Xi}}$ en composante est la matrice

$$J = \begin{pmatrix} \partial_x \Xi_x & \partial_y \Xi_x & \partial_z \Xi_x \\ \partial_x \Xi_y & \partial_y \Xi_y & \partial_z \Xi_y \\ \partial_x \Xi_z & \partial_y \Xi_z & \partial_z \Xi_z \end{pmatrix}$$

et que la relation qu'il s'agit de montrer s'écrit

$$\frac{d}{dt}\left(det\left(J\right) \right) = det\left(J\right)\ Trace\left(\frac{dJ}{dt}\ J^{-1}\right)$$

- Il suffit alors qu'elle soit vraie pour une matrice 3×3 quelconque dont les coefficients dépendent du temps, soit

$$J\left(t\right) = \begin{pmatrix} J_{11}\left(t\right) & J_{12}\left(t\right) & J_{13}\left(t\right) \\ J_{21}\left(t\right) & J_{22}\left(t\right) & J_{23}\left(t\right) \\ J_{31}\left(t\right) & J_{32}\left(t\right) & J_{33}\left(t\right) \end{pmatrix}$$

Annexe : calcul planche 19 – 2

► On fait alors appel à la force brute du calcul symbolique. Par exemple avec le script Maxima (lien cliquable)

```
1  TraceM(mat):=sum(mat[i,i],i,1,length(mat))$
2  J:matrix([J11,J12,J13],[J21,J22,J23],[J31,J32,J33]);
3  depends(flatten(args(J)),[t]);
4  lhs: diff(determinant(J),t);
5  rhs:determinant(J)*TraceM(diff(J,t).invert(J));
6  ratsimp(lhs-rhs);
```

Pour chaque ligne

1. Définition de la fonction de calcul de la trace d'une matrice (plus court que de charger le package contenant 'mattrace') ;
2. Construction de la matrice ;
3. Déclaration de la dépendance des coefficients de la matrice en temps ;
4. Calcul de $\frac{d}{dt}\left(det\,(J) \right)$
5. Calcul de $det\,(J)\;\; Trace\left(\frac{dJ}{dt}\; J^{-1}\right)$
6. Différence des deux termes avec demande de simplification.

Bien évidement on trouve que la différence entre les deux termes est nulle. Ce qui suffit pour établir la propriété.