Équations macroscopiques de la physique classique

$\smile\frown\smile$

Leçon 4

$\smile\frown\smile$

Élasticité linéaire

G. Vinsard

Gerard.Vinsard@univ-lorraine.fr

22 février 2023

Objectifs

- L'élasticité est cette propriété qu'a un corps de se déformer sous l'effet de forces qu'on lui applique et de revenir à sa forme initiale lorsque ces forces sont enlevées.

- Cette propriété se modélise à partir de notions qui sont les tenseurs des déformation et des contraintes.

- On propose ici d'introduire ces tenseurs ainsi que leur liaison par la loi de Hooke dans le cadre restreint des petites déformations. Puis de donner un plan d'étude générique des problèmes d'élasticité stationnaire et linéaire.

- Le cas des grandes déformations qui correspond aux objets qu'on dit élastique dans la vie de tous les jours, comme les élastiques en caoutchouc, n'est pas traité.

Déformation - 1

► Un matériau déformable occupe, avant déformation, un domaine D_0 de bord (∂D_0). Sa déformation est *a priori* décrite par une fonction

$$\begin{array}{cccc} \vec{\Xi} & : & D & \longrightarrow & E_3 \\ & & \vec{x} & \longrightarrow & \vec{\Xi}(\vec{x}) \end{array}$$

qui à un point $\vec{x}$ de D_0 avant déformation associe le point $\vec{\Xi}(\vec{x})$ après déformation. Le domaine déformé occupera alors le domaine image de D_0 par $\vec{\Xi}$

$$D = \vec{\Xi}(D_0)$$

► S'il n'y a pas de déformation mais seulement un mouvement de solide indéformable, la fonction $\vec{\Xi}$ est de la forme

$$\vec{\Xi}(\vec{x}) = \underline{\underline{R}}\,\vec{x} + \vec{\Xi}_0$$

où $\vec{\Xi}_0$ est un vecteur (de translation) constant et $\underline{\underline{R}}$ un endomorphisme de rotation.

Déformation - 2

- Un point $\vec{x} + \delta\vec{x}$ de D_0 se retrouvera en

$$\vec{\Xi}(\vec{x} + \delta\vec{x}) = \vec{\Xi}(\vec{x}) \; + \; \underline{\underline{\nabla}}\vec{\Xi}(\vec{x}) \; \delta\vec{x} \; + \; \vec{o}(\delta\vec{x})$$

où $\underline{\underline{\nabla}}\vec{\Xi}(\vec{x})$ est un endomorphisme et où o est une fonction telle que $\displaystyle\lim_{|\delta\vec{x}|\to\infty} \frac{|\vec{o}(\delta\vec{x})|}{|\delta\vec{x}|} = 0$ qui contient tous les termes d'ordre supérieur à l'unité en $\delta\vec{x}$

- Si donc $\delta\vec{x}$ suffisamment petit, on écrira donc que

$$\vec{\Xi}(\vec{x} + \delta\vec{x}) = \vec{\Xi}(\vec{x}) \; + \; \underline{\underline{\nabla}}\vec{\Xi}(\vec{x}) \; \delta\vec{x}$$

en précisant que c'est à l'ordre 1 en $\delta\vec{x}$ et on fera comme s'il y avait une identité parfaite entre les deux termes.

Déformation - 3

- Un petit domaine δD_0 autour de $\vec{x}$, e.g. une boule $\delta D_0 = \{\vec{x} + \delta\vec{x} \ : \ |\delta\vec{x}| < \delta R\}$ ou encore un cube $\delta D_0 = \left\{\vec{x} + \delta z \ \vec{k}_z + \delta y \ \vec{k}_y + \delta x \ \vec{k}_x \ : \ (\delta x, \delta y, \delta z) \in \left]-\delta L, \delta L\right[^3\right\}$, devient $\vec{\Xi}(\delta D_0)$

- À l'ordre 1, il est possible de préciser la forme de $\vec{\Xi}(\delta D_0)$. Pour la boule, c'est l'ellipsoïde $\delta D = \vec{\Xi}(\delta D_0) = \left\{\vec{\Xi}(\vec{x}) + \delta\vec{y} \ : \ \left|\underline{\underline{\nabla}}\left(\vec{\Xi}(\vec{x})\right)^{-1} \delta\vec{y}\right| < \delta R\right\}$ où $\underline{\underline{\nabla}}\left(\vec{\Xi}(\vec{x})\right)^{-1}$ est l'inverse de $\underline{\underline{\nabla}}\left(\vec{\Xi}(\vec{x})\right)$
Pour le cube, c'est le parallélépipède $\delta D = \left\{\delta z \ \underline{\underline{\nabla}}\vec{\Xi}(\vec{x}) \ \vec{k}_z + \delta y \ \underline{\underline{\nabla}}\vec{\Xi}(\vec{x}) \ \vec{k}_y + \delta x \ \underline{\underline{\nabla}}\vec{\Xi}(\vec{x}) \ \vec{k}_x + \vec{x} \ : \ \right\}$ avec $(\delta x, \delta y, \delta z) \in \left]-\delta L, \delta L\right[^3$. Les trois vecteurs $\underline{\underline{\nabla}}\vec{\Xi}(\vec{x}) \ \vec{k}_x, \ldots$ ne sont plus nécessairement orthogonaux.

Déformation - 4

- Il y aura déformation des domaines δD_0 si l'endomorphisme $\underline{\underline{\nabla}}\vec{\vec{\Xi}}(\vec{x})$ n'est pas un endomorphisme de rotation.

- La condition nécessaire et suffisante pour cela est que

$$^t\,\underline{\underline{\nabla}}\vec{\vec{\Xi}}(\vec{x})\;\underline{\underline{\nabla}}\vec{\vec{\Xi}}(\vec{x}) \neq \underline{\underline{Id}}$$

- Ce qui justifie l'introduction du champ de tenseurs

$$\begin{array}{cccll} \underline{\underline{\varepsilon}} & : & D_0 & \longrightarrow & E_3 \\ & & \vec{x} & \longrightarrow & \frac{1}{2}\left(^t\,\underline{\underline{\nabla}}\vec{\vec{\Xi}}(\vec{x})\;\underline{\underline{\nabla}}\vec{\vec{\Xi}}(\vec{x}) - \underline{\underline{Id}}\right) \end{array}$$

appelé le champ de tenseurs de déformation (ou plus simplement le tenseur de déformation).
(Le champ de tenseur de valeur $^t\,\underline{\underline{\nabla}}\vec{\vec{\Xi}}(\vec{x})\;\underline{\underline{\nabla}}\vec{\vec{\Xi}}(\vec{x})$ est appelé le champ de tenseurs de dilatation.)

Déformation - 5

► Le tenseur de déformation est symétrique (par construction). Comme tel il admet 3 valeurs propres qui correspondent à trois directions propres. i.e.
$\exists\ \left((\lambda,\mu,\nu)\in\mathbb{R}^3\right)$ et $\left(\left(\vec{d}_\lambda,\vec{d}_\mu,\vec{d}_\nu\right)\in {E_3}^3\right)$:
$\varepsilon\ \vec{d}_\lambda=\lambda\ \vec{d}_\lambda,\ \varepsilon\ \vec{d}_\mu=\mu\ \vec{d}_\mu,\ \varepsilon\ \vec{d}_\nu=\nu\ \vec{d}_\nu$ avec
$\left|\vec{d}_\lambda\right|=\left|\vec{d}_\mu\right|=\left|\vec{d}_\nu\right|=1,\ \vec{d}_\lambda\cdot\vec{d}_\mu=\vec{d}_\mu\cdot\vec{d}_\nu=\vec{d}_\lambda\cdot\vec{d}_\mu=0$
(Ces grandeurs $((\lambda,\mu,\nu))$ et $\left(\left(\vec{d}_\lambda,\vec{d}_\mu,\vec{d}_\nu\right)\right)$ et $\left({E_3}^3\right)$ dépendent du point $\vec{x}$ elles sont donc respectivement des champs de scalaires et des champs de vecteurs.)

► On appelle les valeurs propres les déformations normales principales et les vecteurs propres les directions principales de déformation.

Déformation - 6

► La condition nécessaire et suffisante portant sur $\vec{\Xi}$ pour que le tenseur de déformation existe est que cette fonction soit un difféomorphisme de D_0 vers $\vec{\Xi}(D_0)$, soit

- $\vec{\Xi}$ est différentiable (pour le développement de Taylor de la planche 4) ;
- $\vec{\Xi}$ est bijective (pour que les images des domaines élémentaires de la planche 5 soient bien des domaines élémentaires) ; L'inverse est noté $\vec{\Xi}^{-1}$
- son inverse est différentiable : pour que $\underline{\underline{\nabla}}\vec{\Xi}^{-1} = \underline{\underline{\nabla}}\left(\vec{\Xi}^{-1}\right)$

► On suppose donc la condition remplie, mais l'hypothèse des petites déformations qui va être faite limitera la difficulté qu'il y a à la satisfaire dans le cas général.

Petites déformations - 1

- La fonction $\vec{\vec{\Xi}}$ peut-être écrite

$$\vec{\vec{\Xi}}(\vec{x}) = \vec{u}(\vec{x}) + \vec{x}$$

où $\begin{array}{cccc} \vec{u} : & D & \longrightarrow & E_3 \\ & \vec{x} & \longrightarrow & \vec{u}(\vec{x}) \end{array}$ s'appelle le champ de déplacements
(plus simplement le déplacement).

- Sous cette forme, le tenseur de déformations s'écrit (en omettant la dépendance en $\vec{x}$, i.e. $\underline{\underline{\nabla}}\vec{u}(\vec{x}) = \underline{\underline{\nabla}}\vec{u}$)

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\ \left(\left({}^t\,\underline{\underline{\nabla}}\vec{u} + \underline{\underline{\nabla}}\vec{u}\right)\ +\ {}^t\,\underline{\underline{\nabla}}\vec{u}^2\right)$$

- L'hypothèse des petites déformations consiste à supposer $\vec{u}$ suffisamment petit pour que le terme quadratique en $\vec{u}$ puisse être négligé devant le terme linéaire et donc que

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\ \left({}^t\,\underline{\underline{\nabla}}\vec{u} + \underline{\underline{\nabla}}\vec{u}\right)$$

Petites déformations - 2

- Sans l'hypothèse des petites déformations, on ne doit pas confondre la position $\vec{x}$ d'un point dans D_0 avec celle $\vec{\Xi}(\vec{x})$ de ce point dans $D = \vec{\Xi}(D_0)$ après déformation.

- Avec elle non plus, d'ailleurs, le point $\vec{x}$ se retrouve en $\vec{u}(\vec{x}) + \vec{x}$. Par contre, si on examine

$$\vec{u}(\vec{x} + \vec{u}(\vec{x})) = \vec{u}(\vec{x}) + \underline{\underline{\nabla}}\vec{u}(\vec{x})\ \vec{u}(\vec{x}) + o(\vec{u}(\vec{x}))$$

on remarque que le terme $\underline{\underline{\nabla}}\vec{u}(\vec{x})\ \vec{u}(\vec{x})$ est quadratique en $\vec{u}$. Et donc, à l'ordre 1 en $\vec{u}$, on a

$$\vec{u}(\vec{x} + \vec{u}(\vec{x})) = \vec{u}(\vec{x})$$

Ce qui permet notamment d'inverser (à l'ordre 1) l'équation $\vec{y} = u(\vec{x}) + \vec{x}$ comme $\vec{x} = \vec{y} - \vec{u}(\vec{y})$.

Tenseur des contraintes - 1

- Étant entendu

1. que la matière élastique occupant le domaine D_0 est déformé en $D = \vec{\Xi}(D_0)$
2. que cette déformation est causée par la combinaison de forces de volume décrites par une densité volumique de forces $\begin{array}{cccc} \vec{f} & : & D_0 & \longrightarrow & E_3\left(N \ / \ m^3\right) \\ & & \vec{x} & \longrightarrow & \vec{f}(\vec{x}) \end{array}$ et de forces de surface décrite par une une densité surfacique de forces
$$\begin{array}{ccccc} \vec{f_\partial} & : & \partial D_0 & \longrightarrow & E_3\left(N \ / \ m^2\right) \\ & & \vec{x} & \longrightarrow & \vec{f_\partial}(\vec{x}) \end{array}$$
3. qu'en l'absence de ces forces la matière la forme D_0
4. qu'en sa présence elle garde la forme D qui est stationnaire (i.e. invariante dans le temps)

On se forme l'idée que les forces de volume et de surface sont telles que la somme de leur action sur un petit domaine $\delta D \subset D$ quelconque est nulle. Toute la question est de traduire cette idée en modèle physique.

Tenseur des contraintes - 2

- Tout d'abord, les supports des densités de forces de volume $\vec{f}$ et de surface $\vec{f_\partial}$ sont D_0 et ∂D_0 alors que c'est plutôt $D = \vec{\Xi}(D_0)$ et $\partial D = \vec{\Xi}(\partial D_0)$ qu'ils devraient être pour exprimer l'idée de l'équilibre (autre mot pour la stationnarité) d'un petit domaine $\delta D \subset D$.

- L'hypothèse des petits mouvements où $\vec{\Xi}(\vec{x}) = \vec{u}(\vec{x}) + \vec{x}$ avec 'petit' lève cette difficulté. En effet s'il y a petit mouvement, il y a petite force et donc si on admet que celles-ci sont du même ordre de petitesse que $\vec{u}$, de la même manière qu'on a pu admettre qu'à l'ordre 1 $\vec{y} = u(\vec{x}) + \vec{x}$ comme $\vec{x} = \vec{y} - \vec{u}(\vec{y})$ on aura $\vec{f}(\vec{u}(\vec{x}) + \vec{x}) = \vec{f}(\vec{x})$ et $\vec{f_\partial}(\vec{u}(\vec{x}) + \vec{x}) = \vec{f_\partial}(\vec{x})$

- Ce qui fait qu'on peut confondre le domaine et son image en ce qui concerne le support des forces.

Tenseur des contraintes - 3

- Reprenons le petit domaine de la planche 5

$$\delta D_0 = \left\{ \vec{x} + \delta z\ \vec{k}_z + \delta y\ \vec{k}_y + \delta x\ \vec{k}_x\ :\ (\delta x, \delta y, \delta z) \in \left]-\delta L, \delta L\right[^3 \right\}$$

- Les forces qui s'exercent sur lui sont la somme de

$$\vec{F}_{\text{Vol}} = \int_{\delta D_0} \vec{f}\ dV\ \approx\ Volume\,(\delta D_0) \times \vec{f}\,(\vec{x})$$

et de

$$\vec{F}_{\text{Surf}} = \int_{\partial \delta D_0} \vec{f}_{\partial}^{\ \partial \delta D_0}\ dS$$

où $\vec{f}_{\partial}^{\ \partial \delta D_0}$ est la densité de forces que les domaines contigus (le touchant) à δD_0 exercent sur lui.

- L'équilibre en translation (pour la rotation il faut introduire le moment des forces) du petit domaine s'écrit donc

$$\vec{F}_{\text{Vol}} + \vec{F}_{\text{Surf}} = \vec{0}$$

Toute la difficulté consiste à exprimer $\vec{f}_{\partial}^{\ \partial \delta D_0}$!

Tenseur des contraintes - 4

► Une notion élaborée au XIXième siècle permet cette expression de $\vec{f_\partial}^{\partial \delta D_0}$. C'est le tenseur des contraintes.

► Comme dit planche 11, le domaine D_0 entier (pas le petit domaine autour de $\vec{x}$) est soumis aux densités volumique $\vec{f}$ et surfacique $\vec{f_\partial}$ de forces. On introduit alors un champ de tenseurs (plus simplement un tenseur) des contraintes

$$\begin{array}{cccc} \underline{\underline{\sigma}} & : & D_0 & \longrightarrow & E_3\left(N \;/\; m^2\right) \\ & & \vec{x} & \longrightarrow & \underline{\underline{\sigma}}\left(\vec{x}\right) \end{array}$$

tel que

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \;+\; \vec{f} = \vec{0} \;\text{ dans }\; D_0 \;\text{ et }\; \underline{\underline{\sigma}}\,\vec{n} = \vec{f_\partial} \;\text{ sur }\; \partial D_0$$

et on demande de plus que $\underline{\underline{\sigma}}$ soit symétrique (égal à sa transposée)

$$^t\,\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}$$

Tenseur des contraintes - 5

- Puisque

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{\underline{\sigma}} \ + \ \vec{f} = \vec{0} \ \text{ dans } \ D_0 \ \text{ et } \ \underline{\underline{\sigma}}\,\vec{n} = \vec{f_\partial} \ \text{ sur } \ \partial D_0$$

- C'est en particulier vrai en tout points de δD_0, d'où

$$\int_{\delta D_0} \vec{f}\, dV + \int_{\delta D_0} \underline{\nabla}\cdot\underline{\underline{\sigma}}\, dV = \vec{0}$$

Le terme $\int_{\delta D_0} \vec{f}\, dV$ est la force totale que la densité volumique de forces exerce sur δD_0. L'autre terme se ramène à une intégrale sur le bord $\partial\delta D_0$ de ce domaine, soit

$$\int_{\delta D_0} \underline{\nabla}\cdot\underline{\underline{\sigma}}\, dV = \int_{\partial\delta D_0} \underline{\underline{\sigma}}\,\vec{n}\, dS$$

et donc il vient que

$$\int_{\partial\delta D_0} \underline{\underline{\sigma}}\,\vec{n}\, dS + \int_{\delta D_0} \vec{f}\, dS = \vec{0}$$

qui indique que la somme des forces exercées sur δD_0 est nulle

Tenseur des contraintes - 6

- De plus $\underline{\nabla}\cdot\underline{\underline{\sigma}} \; + \; \vec{f} = \vec{0}$ dans D_0 et $\underline{\underline{\sigma}}\,\vec{n} = \vec{f_\partial}$ sur $\partial D_0 \;\Rightarrow$

$$\vec{x}\times\underline{\nabla}\cdot\underline{\underline{\sigma}} \; + \; \vec{x}\times\vec{f} = \vec{0} \text{ dans } D_0 \text{ et } \vec{x}\times\underline{\underline{\sigma}}\,\vec{n} = \vec{x}\times\vec{f_\partial} \text{ sur } \partial D_0$$

D'où

$$\int_{\delta D_0} \vec{x}\times\underline{\nabla}\cdot\underline{\underline{\sigma}}\,dV + \int_{\delta D_0} \vec{x}\times\vec{f}\,dV = \vec{0}$$

- Un calcul (en annexe) amène à s'apercevoir que si ${}^t\,\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}$

$$\int_{\delta D_0} \vec{x}\times\underline{\nabla}\cdot\underline{\underline{\sigma}}\,dV = \int_{\partial\delta D_0} \vec{x}\times\underline{\underline{\sigma}}\,\vec{n}\,dS$$

Et donc

$$\int_{\delta D_0} \vec{x}\times\vec{f}\,dV + \int_{\partial\delta D_0} \vec{x}\times\underline{\underline{\sigma}}\,\vec{n}\,dS = \vec{0}$$

qui indique la somme des moments exercés sur δD_0 est nulle.

Tenseur des contraintes - 7

- À partir de $\underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}} = 0$ et ${}^t\,\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}$, on a fait apparaître la densité de forces de surfaces sur $\partial\delta D_0$ d'expression $\underline{\underline{\sigma}}\,\vec{n}$.

- Si le petit domaine δD_0 est intérieur à D_0, cette densité de surface est entièrement due aux efforts que les domaines qui lui sont contigus exerce sur lui. Si son bord a une partie commune avec le bord de $D - 0$, on a sur cette partie $\underline{\underline{\sigma}}\,\vec{n} = \vec{f_\partial}$.

- Donc, compte tenu que les normales extérieures à la partie commune du bord de deux petits domaine qui se touchent sont de sens opposé, toutes les contributions des termes de bord intérieurs s'annulent deux à deux. Faire un dessin

- Et finalement on a trouvé des équations cohérentes assurant l'équilibre d'un quelconque petit domaine, ce sont, pour ${}^t\,\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}$,

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \vec{f} = \vec{0} \text{ dans } D_0 \text{ et } \underline{\underline{\sigma}}\,\vec{n} = \vec{f_\partial} \text{ sur } \partial D_0$$

Loi de Hooke - 1

- Les tenseurs des déformations et des contraintes sont introduits, mais[1] ils ne sont pas encore liés l'un à l'autre.

- On ne traite que des matériaux dont cette liaison peut être considérée comme linéaires. Et donc, en toute généralité, ces matériaux peuvent être décrit par l'introduction de coefficients qui peuvent être rangés dans K_{ijkl}, les indices parcourant $\{x, y, z\}$, par (indices répétés)
$$\sigma_{ij} = K_{ijkl}\, \varepsilon_{kl}$$

- On obtient donc qu'il y a *a priori* 81 coefficients possibles pour chaque matériaux. Mais il y a en en fait nettement moins. La symétrie des $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et $\underline{\underline{\sigma}}$ les réduit à 36 (6 coefficient seulement par tenseurs). Et une hypothèse d'isotropie (invariance de la relation $\sigma_{ij} = K_{ijkl}\, \sigma_{kl}$ par rotation) à seulement 2.

---

1. sauf dans l'indication donnée que le tenseur des contrainte a le degré de petitesse du tenseur des déformation afin d'exploiter l'hypothèse des petits mouvement

Loi de Hooke - 2

- Cette réduction de la relation constitutive[2] $\sigma_{ij} = K_{ijkl}\, \sigma_{kl}$ à seulement 2 coefficients s'appelle la loi de Hooke.

- Elle s'écrit ($Tr\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)$ est la trace de $\underline{\underline{\varepsilon}}$)

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda\; Tr\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)\; \underline{\underline{Id}}\; +\; 2\,\mu\, \underline{\underline{\varepsilon}}$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé.

- Dans la notation en indices (répété), cela donne

$$\sigma_{ij} = \lambda\, \varepsilon_{kk}\, \delta_{ij}\; +\; 2\,\mu\, \varepsilon_{ij}$$

pour $(Tr\left(\varepsilon\right) = \varepsilon_{zz} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xx})$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \lambda\; Tr\left(\varepsilon\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\,\mu \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

2. Ça s'appelle comme cela. Et la discipline qui traite de la recherche de relations constitutive pour des matériaux moins simples que ceuc qu'on considère ici s'appelle la rhéologie des solides.

Module d'Young et coefficient de Poisson

Ou encore

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{xy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda + 2\,\mu)\;\varepsilon_{xx} & 2\,\mu\,\varepsilon_{xy} & 2\,\mu\,\varepsilon_{xz} \\ 2\,\mu\,\varepsilon_{xy} & (\lambda + 2\,\mu)\;\varepsilon_{yy} & 2\,\mu\,\varepsilon_{yz} \\ 2\,\mu\,\varepsilon_{xz} & 2\,\mu\,\varepsilon_{xy} & (\lambda + 2\,\mu)\;\varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

qui, du fait de la symétrie des tenseurs, ne contient que les 6 relations des parties triangulaires supérieure (diagonale incluse) entre les deux matrices.

► Les valeurs des coefficients de Lamé sont des caractéristiques de matériaux, d'unité le Pa, mais on trouve plutôt dans la littérature la donnée des module d'Young E (en Pa) et coefficient de Poisson ν (sans dimensions) reliés à λ et μ par

$$\lambda = \frac{\nu\,E}{(1-2\,\nu)(1+\nu)}\;;\;\mu = \frac{E}{2\,(1+\nu)} \iff E = \frac{\mu\,(3\,\lambda + 2\,\mu)}{\lambda + \mu}\;;\;\nu = \frac{\lambda}{2\,(\lambda+\mu)}$$

► La raison de ce choix est pratique comme cela apparaît dans l'application sur la traction d'une éprouvette ci dessous.

Équation de Navier

▶ Compte tenu que le tenseur des déformations s'exprime en fonction du champ de déplacements $\vec{u}$ comme $\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\ \left({}^t\,\underline{\underline{\nabla}}\vec{u} + \underline{\underline{\nabla}}\vec{u}\right)$, le tenseur des contraintes s'écrit (avec la loi de Hooke)

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda\,\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\,\underline{\underline{Id}} \;+\; \mu\ \left({}^t\,\underline{\underline{\nabla}}\vec{u} + \underline{\underline{\nabla}}\vec{u}\right)$$

▶ Et sa divergence est (cf. calcul en annexe)

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{\underline{\sigma}} = (\lambda + \mu)\ \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right) \;+\; \mu\,\vec{\Delta}\,(\vec{u})$$

▶ L'équation d'équilibre $\vec{f} + \underline{\nabla}\cdot\underline{\underline{\sigma}} = \vec{0}$ s'écrit alors

$$(\lambda + \mu)\ \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right) \;+\; \mu\,\vec{\Delta}\,(\vec{u}) \;+\; \vec{f} = \vec{0}$$

c'est l'équation de Navier.

Conditions aux limites

► Les conditions aux limites sur ∂D_0 exprimées avec le tenseur des contraintes sont $\underline{\underline{\sigma}}\ \vec{n} = \vec{f}_\partial$ (cf. planche 14).

► Avec $\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\ \left({}^t\,\underline{\underline{\nabla}}\vec{u} + \underline{\underline{\nabla}}\vec{u}\right)$ et la loi de Hooke, elles deviennent

$$\lambda\ \vec{\nabla}\cdot\vec{u}\ \vec{n}\ +\ \mu\ \left({}^t\,\underline{\underline{\nabla}}\vec{u} + \underline{\underline{\nabla}}\vec{u}\right)\ \vec{n} = \vec{f}_\partial$$

Pour $\vec{u} = u_i\ \vec{k}_i$, cela donne

$$\lambda\ u_{j\,,j}\ n_i\ +\ \mu\ \left(u_{j\,,i} + u_{i\,,j}\right)\ n_j = \vec{k}_i \cdot \vec{f}_\partial$$

qui ne se simplifie pas dans le cas général. Contrairement à certains cas particuliers, comme on le verra.

Problème d'élasticité en fonction des forces

► En collectant les résultat, le problème d'élasticité posé à partir de la donnée de forces de volume $\vec{f}$ et de surface $\vec{f_\partial}$ consiste en la recherche du champ de déplacement $\vec{u}$ tel que

$$(\lambda + \mu)\ \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right)\ +\ \mu\,\vec{\Delta}\,(\vec{u})\ +\ \vec{f}\ =\ \vec{0}\ \text{ dans }\ D_0$$

avec

$$\lambda\,\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\,\vec{n}\ +\ \mu\ \left({}^t\,\underline{\underline{\nabla}}\vec{u} + \underline{\underline{\nabla}}\vec{u}\right)\ \vec{n}\ =\ \vec{f_\partial}\ \text{ sur }\ \partial D_0$$

► Ce problème étant supposé résolu (il admet une solution unique à une constante $\vec{u_0}$ près), la connaissance de $\vec{u}$ permet de calculer $\underline{\underline{\varepsilon}}$ puis $\underline{\underline{\sigma}}$ en tous points de D_0.

► Le calcul de $\underline{\underline{\sigma}}$ est utile pour déterminer les limites de l'hypothèse d'élasticité du matériau (qui est faite *a priori*).

Conditions aux limites « en déplacement »

► Lorsqu'on ne connaît pas pas les densités de forces surfacique $\vec{f}_\partial$ sur une portion de la frontière Γ mais qu'on y connaît les déplacements $\vec{u}$

$$\vec{u} = \vec{u}_p \text{ sur } \Gamma \subset \partial D_0$$

Cette donnée sert de condition aux limites sur cette portion Γ et remplace

$$\lambda\, \vec{\nabla}\cdot\vec{u}\, \vec{n} \,+\, \mu\, \left({}^t\, \underline{\underline{\nabla}}\vec{u} + \underline{\underline{\nabla}}\vec{u}\right)\, \vec{n} \,=\, \vec{f}_\partial \;\text{ sur }\; \Gamma$$

Cette expression permettant d'obtenir la densité superficielle $\vec{f}_\partial$ qu'il faudrait mettre sur Γ pour que le déplacement soit bien $\vec{u}_p$.

Limite élastique

- Un matériau n'a un comportement élastique qu'en deçà d'un certain seuil de contrainte, au delà il casse ou devient plastique. Il convient donc de fixer une limite élastique aux contraintes.

- Pour une position $\vec{X}$ dans D_0 et une direction $\vec{N}$, la force due au tenseur des contraintes dans cette direction est $\vec{F}$ qui peut s'écrire

$$\vec{F} = F_n\, \vec{N} + \vec{F}_t \text{ avec } \vec{F}_t \cdot \vec{N} = 0$$

F_n est la force qui correspond à une pression dans la direction $\vec{N}$ du point matériel occupant $\vec{X}$ alors que $|\vec{F}_t|$ correspond à un cisaillement.

- La limite élastique porte en général sur le cisaillement et un critère possible est l'exigence qu'en toute position, le cisaillement maximal (par rapport à toutes les directions possibles) soit inférieur à un seuil fixé, c'est le critère de Tresca.

- Pratiquement (analyse du cercle de Mohr) ce cisaillement maximum en une position est $(\sigma_{III} - \sigma_I)/2$ où $\sigma_I \leq \sigma_{II} \leq \sigma_{III}$ sont les valeurs propres de la matrice σ_{ij} et donc le critère de Tresca s'écrit

$$(\sigma_{III} - \sigma_I)/2 < \text{ seuil de limite élastique en cisaillement}$$

Exemple : la traction d'une éprouvette - 1

- L'éprouvette est un domaine

$$D_0 = \{\vec{x} \text{ avec } x\ \vec{k}_x + y\ \vec{k}_y \in S \subset E_2 \ \text{ et } 0 < z < L\}$$

Son bord ∂D_0 est composé de la surface latérale
$\Gamma_l = \{\vec{x} \text{ avec } x\ \vec{k}_x + y\ \vec{k}_y \in \partial S \text{ et } 0 < z < L\}$ et des bases
$\Gamma_0 = \{\vec{x} \text{ avec } x\ \vec{k}_x + y\ \vec{k}_y \in S \text{ et } z = 0\}$,
$\Gamma_1 = \{\vec{x} \text{ avec } x\ \vec{k}_x + y\ \vec{k}_y \in S \text{ et } z = L\}$

- Le déplacement est $\vec{u} = u\ \vec{k}_x + v\ \vec{k}_y + w\ \vec{k}_z$; l'éprouvette est fixée en Γ_0 et donc $w = 0$ en $z = 0$; elle se déplace de ΔL en Γ_1, soit : $w = \Delta L$ en $z = L$.

- Elle n'est soumise à aucune sollicitation en Γ_l, et donc si σ_{ij} est le tenseur des contraintes et que $n_x\ \vec{k}_x + n_y\ \vec{k}_y$ est la normale sur ∂S alors

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{xx}\ n_x + \sigma_{xy}\ n_y = 0 \\ \sigma_{yx}\ n_x + \sigma_{yy}\ n_y = 0 \end{aligned}\right\} \text{ pour } x\ \vec{k}_x + y\ \vec{k}_y \in \partial S \text{ et } \forall z \in]0, L[$$

Exemple : la traction d'une éprouvette - 2

- Le déplacement

$$\vec{u} = -\alpha\ x\ \vec{k}_x - \alpha\ y\ \vec{k}_y + \frac{\Delta L}{L}\ z\ \vec{k}_z$$

satisfait à l'équation de Navier (ou $\vec{f} = \vec{0}$: pas de sollicitation de volume), soit

$$(\lambda + \mu)\ \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}\right) + \mu\ \vec{\Delta}\vec{u} = \vec{0} \text{ dans } D_0$$

- Le tenseur des déformations est $\epsilon = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta L}{L} \end{pmatrix}$
- Le tenseur des contraintes

$$\sigma = \begin{pmatrix} (\frac{\Delta L}{L} - 2\ \alpha)\ \lambda - 2\alpha\ \mu & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{\Delta L}{L} - 2\ \alpha)\ \lambda - 2\alpha\ \mu & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{\Delta L}{L} - 2\ \alpha)\ \lambda + 2\frac{\Delta L}{L}\ \mu \end{pmatrix}$$

Exemple : la traction d'une éprouvette - 3

- Les conditions aux limites sur Γ_l se réduisent alors à

$$(\frac{\Delta L}{L} - 2\,\alpha)\,\lambda - 2\alpha\,\mu = 0$$

soit

$$\alpha = \frac{\Delta L}{L}\frac{\lambda}{2\,(\lambda+\mu)} = \nu\,\frac{\Delta L}{L}$$

on comprend ainsi l'intérêt du coefficient de Poisson.

- Les équations d'équilibre en Γ_0 sont

$$f^0_{\partial x} = 0\,;\; f^0_{\partial y} = 0\,;\; f^0_{\partial z} = -\left((\frac{\Delta L}{L} - 2\,\alpha)\,\lambda + 2\frac{\Delta L}{L}\,\mu\right) = -E\,\frac{\Delta L}{L}$$

on comprend là l'intérêt du module d'Young.
Il n'y a pas de sollicitation de surface en $\vec{k}_x$ et $\vec{k}_y$ à mettre pour la traction, par contre il en faut une en $\vec{k}_z$.

Exemple : la traction d'une éprouvette - 4

- de la même façon, en Γ_1,

$$f^1_{\partial x} = 0 \; ; \; f^1_{\partial y} = 0 \; ; \; f^1_{\partial z} = +E \, \frac{\Delta L}{L}$$

la composante suivant $\vec{k_z}$ est égale et opposée à celle de Γ_0.

- Le problème de traction est donc complétement résolu : un allongement relatif de $\Delta L/L$ peut être réalisé en soumettant l'éprouvette à deux forces égales et opposées s'exerçant sur Γ_0 et Γ_1 avec une densité de surface uniforme d'intensité $E \, \Delta L/L$.

- De plus l'épouvette subira une contraction de sa section (qui peut être quelconque) correspondant à l'homothétie de rapport $\nu \, \Delta L/L$; la variation de volume de l'éprouvette sera donc

$$\frac{\Delta V}{V} = \left(1 - \nu \frac{\Delta L}{L}\right)^2 \, \left(1 + \frac{\Delta L}{L}\right) - 1 \approx 1 - \nu \frac{\Delta L}{L}$$

Exemple : la traction d'une éprouvette - 5

- In fine, le tenseur des contraintes est $\sigma = E\,\frac{\Delta L}{L}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et

donc la valeur à comparer au seuil de limite élastique en utilisant le critère de Tresca est $\frac{E}{2}\frac{\Delta L}{L}$.

- Le plan d'étude de cet exemple (emblématique) a été le suivant :

  1. On devine une forme éventuellement paramétrée pour le déplacement ;
  2. On cherche les conditions sur le paramétrage pour que Navier soit vérifié ;
  3. Même chose sur les conditions aux limites ;
  4. Le problème est alors résolu ; il reste à vérifier avec le critère de Tesca que la limite élastique n'est pas franchie.

C'est ce plan qu'il faut suivre : dans les cas plus compliqués il faut utiliser un logiciel pour calculer le déplacement.

Principe de Saint Venant

- Si l'éprouvette de l'exemple avait été coincée dans des mâchoires mordant sur les parties de Γ_l prochent de Γ_0 et Γ_1, il aurait été assez difficile d'énoncer clairement la forme des conditions aux limites.

- Mais il est possible d'approximer ce problème difficile par celui facile qui vient d'être traité en espérant que les résultats de l'approximation soient proches de ceux du problème initial.

- On invoque pour cela l'autorité de Saint Venant qui pose en principe que de remplacer un système de forces par un autre ne change pas sensiblement la solution loin de l'endroit où ils s'appliquent pourvu que les deux systèmes de forces soit indiscernables dans le cas où le domaine D_0 serait un solide indéformable.

- C'est une escroquerie mais une escroquerie qui porte un nom est en quelque sorte consacrée et donc socialement admissible. Il est d'ailleurs possible d'évoquer le nom de Saint Venant quand on souhaite faire une approximation de ce genre dans d'autres domaines que celui de la mécanique (par exemple décider qu'une densité de courant électrique est répartie uniformément dans une section de conducteur).

Deux domaines en contact

- Si deux domaines élastiques D_1 et D_2 sont en contact l'un avec l'autre et ont donc une frontière Γ commune, les problèmes d'élasticité de chacun des domaines peuvent s'écrire comme cela a été décrit à l'exception des relations sur cette frontière.

- Ces relations sont que les forces de surface (i.e. la composante normale du tenseur des contraintes) dues aux deux tenseurs σ^1_{ij} et σ^2_{ij} sont identiques. Soit, en convenant d'une orientation commune pour les deux domaines de la normale $\vec{n}$ à la frontière Γ

$$\sigma^1_{ix} n_x + \sigma^1_{iy} n_y + \sigma^1_{iz} n_z = \sigma^2_{ix} n_x + \sigma^2_{iy} n_y + \sigma^2_{iz} n_z \text{ pour } i = x, y, z$$

- Cette « simple » considération permet de traiter une grande quantité de problèmes pratiques mettant en présence des milieux composites.

- La limitation vient de ce que les matériaux anisotropes (pour lesquels les module d'Young et coefficient de Poisson varient selon la direction où ils sont considérés) et inhomogènes (ces coefficients varient avec la position) n'ont pas été traités. La relation de continuité de la composante normale du tenseur des contraintes en est d'ailleurs une clée d'entrée...

Milieu élastiques

- Dans certaines limites de déformation, tous les matériaux peuvent être considérés comme élastiques aux petites déformations.

- Mais on retiendra qu'il s'agit surtout de métaux pour lesquels le modules d'Young est de l'ordre de la centaine de giga Pascal et le coefficient de Poisson de l'ordre de 0.3.

- On trouve également des verres, roches mais il faut faire attention que ces matériaux sont fréquemment anisotropes, par exemple du fait de sa structure granulaire le béton se comporte très différemment en compression et en traction (qu'il ne ≪ tient ≫ pas).

- Certains matériaux que la pensée associe à l'élasticité, comme le caoutchouc, ont des modules d'Young de l'ordre du mega Pascal et surtout un coefficient de Poisson qui vaut presque exactement 0.5, ce qui correspond à $\mu = 0$ et donc à un comportement entièrement déterminé par la compression (le cisaillement ne compte pas). Mais ces matériaux ne sont généralement pas utilisés en petites déformations.

- Et pour finir, un fluide parfait (viscosité nulle) ou encore dans lequel l'écoulement est nul (hydrostatique) est un milieu élastique dans lequel le tenseur des contraintes est $P\ \delta_{ij}$ où P est la pression dans le fluide.

Calcul planche 16

$$\begin{aligned}\vec{x} \times \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}} &= \epsilon_{ijk}\, x_j\, \sigma_{kl,l}\, \vec{k}_i \\ &= \epsilon_{ijk}\, (x_j\, \sigma_{kl})_{,l}\, \vec{k}_i - \epsilon_{ijk}\, x_{i,l}\, \sigma_{kl}\, \vec{k}_i\end{aligned}$$

Compte tenu que $x_{j,l} = \delta_{jl}$ on obtient $\epsilon_{ijk}\, x_{i,l}\, \sigma_{kl}\, \vec{k}_i = \epsilon_{ijk}\, \sigma_{kj}\, \vec{k}_i$ et

$$\epsilon_{ijk}\, \sigma_{kj}\, \vec{k}_i = (\sigma_{23} - \sigma_{32})\, \vec{k}_1 + (\sigma_{31} - \sigma_{13})\, \vec{k}_2 + (\sigma_{12} - \sigma_{21})\, \vec{k}_3$$

Si donc ${}^t\,\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}$, ce terme est nul.

Il reste alors

$$\begin{aligned}\vec{x} \times \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}} &= \epsilon_{ijk}\, (x_j\, \sigma_{kl})_{,l}\, \vec{k}_i \\ &= \left(\epsilon_{ijk}\, x_j\, \sigma_{kl}\, \vec{k}_i\right)_{,l}\end{aligned}$$

d'où

$$\int_{\delta D_0} \vec{x} \times \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}}\, dV = \int_{\partial \delta D_0} \epsilon_{ijk}\, x_j\, \sigma_{kl}\, \vec{k}_i\, n_l\, dS = \int_{\partial \delta D_0} \vec{x} \times \underline{\underline{\sigma}}\, \vec{n}\, dS$$

Calcul planche 21

$$\vec{u} = u_i\ \vec{k}_i \Longrightarrow \underline{\underline{\nabla}}\vec{u} = u_{i,j}\ \left]\vec{k}_i, \vec{k}_j\right[$$

$$Tr\left(\underline{\underline{\nabla}}\vec{u}\right) = u_{i,i} = \vec{\nabla}\cdot\vec{u}$$

$$\underline{\nabla}\cdot\left(\underline{\underline{\nabla}}\vec{u}\right) = u_{i,jj} = \vec{\Delta}\left(\vec{u}\right)$$

$$\underline{\nabla}\cdot\left({}^t\ \underline{\underline{\nabla}}\vec{u}\right) = u_{j,ij} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right)$$