Équations macroscopiques de la physique classique

$\smile\frown\smile$

Leçons 2 et 3

$\smile\frown\smile$

Géométrie ; champs de scalaires, de vecteurs et de tenseurs (d'ordre 2) ; opérateur différentiels

G. Vinsard

Gerard.Vinsard@univ-lorraine.fr

13 février 2023

Objectifs de la leçon

- Les équations macroscopiques de la physique classique sont des conditions permettant de déterminer des champs de scalaires, de vecteurs et de tenseurs d'ordre 2 ;

- Les champs étant essentiellement des applications dont les arguments sont la position dans l'espace et le temps, il s'agit déjà de préciser ce que sont leux domaines de définition dans l'espace (géométrie)

- Ensuite de donner des précisions sur les propriétés de ces champs ; ainsi que les opérations qui permettent de passer des champs à des quantités scalaires globales ;

- Et finalement de préciser ce que sont les conditions (Équations aux Dérivées Partielles),

L'espace E_3, ses coordonnées

- L'espace E_3 est un espace vectoriel euclidien sur le corps de réels, donc il muni d'un produit scalaire à partir duquel on peut fabriquer une norme. Comme E_3 est de dimension 3 on peut également le munir d'une opération appelée le produit vectoriel ainsi que d'une autre opération qui est le produit mixte.

- Dès lors qu'on donne des vecteurs de base $\left(\vec{k}_x, \vec{k}_y, \vec{k}_z\right)$ à cet espace E_3 (une famille libre de vecteurs de E_3), un quelconque de ses éléments $\vec{x}$ (noté avec une flèche surlignante) peut s'écrire $\vec{x} = z\ \vec{k}_z + y\ \vec{k}_y + x\ \vec{k}_x$ où le triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ constitue les coordonnées cartésiennes du vecteur $\vec{x}$.

- Il y a là une difficulté liée au fait qu'on prête au vecteur $\vec{x}$ une longueur $|\vec{x}|$, la distance entre la position représentée par $\vec{x}$ et l'origine qui correspond au vecteur nul $\vec{0}$, qui est en mètre. Si les vecteurs $\left(\vec{k}_x, \vec{k}_y, \vec{k}_z\right)$ sont des éléments de E_3 alors les coordonnées doivent être des nombre sans dimension. Et, par exemple, $x\ \vec{k}_x$ représente la position homothétique d'un facteur x à celle qui est représenté par $\vec{k}_x$.

- Comme on souhaite en général que les coordonnées portent l'information sur l'unité de distance, on décide que ce sont les vecteurs de bases qui n'ont pas de dimension et donc il sont éléments non pas de E_3 mais de l'espace image de E_3 obtenu par division de tous les éléments pas l'unité de longueur.

L'espace E_3, ses coordonnées

- Ceci étant précisé, on ajoute que lorsque la base $\left(\vec{k}_x, \vec{k}_y, \vec{k}_z\right)$ est orthonormée, le produit scalaire en coordonnées cartésiennes s'écrit $\vec{x} \cdot \vec{x}\,' = z\,z' + y\,y' + x\,x'$ et la norme $|\vec{x}| = |\vec{x}| = \sqrt{(z^2 + y^2 + x^2)}$

- Le produit vectoriel s'écrit $\vec{x} \times \vec{x}\,' = (y\,z' - y'\,z)\;\vec{k}_x + (x'\,z - x\,z')\;\vec{k}_y + (x\,y' - x'\,y)\;\vec{k}_z$ il est antisymétrique $\vec{x} \times \vec{x}\,' = -\vec{x}\,' \times \vec{x}$

- le produit mixte $(\vec{x}, \vec{x}\,', \vec{x}\,'') = \vec{x} \cdot (\vec{x}\,' \times \vec{x}\,'') = \vec{x}\,' \cdot (\vec{x}\,'' \times \vec{x}) = \vec{x}\,'' \cdot (\vec{x}\,' \times \vec{x})$ est symétrique par permutation circulaire de ses termes et antisymétrique pour une permutation impaire $(\vec{x}, \vec{x}\,', \vec{x}\,'') = -(\vec{x}\,', \vec{x}, \vec{x}\,'')$

- Le produit vectoriel a comme signification géométrique que $\vec{x} \times \vec{x}\,'$ est le vecteur orthogonal (dans le sens direct quelques commentaires à faire) au plan défini par les vecteurs $(\vec{x}, \vec{x}\,')$ dont la longueur est la surface du losange formé par ces vecteurs.

- Son unité physique est donc le m^2. Ce n'est donc pas un élément de E_3. on va introduire les espaces E_3(unité) pour pouvoir y placer les vecteurs qui partagent avec E_3 la direction mais pas l'unité physique de longueur. Ainsi $\vec{x} \times \vec{x}\,' \in E_3\left(m^2\right)$.

L'espace E_3, ses coordonnées

▶ Le produit mixte $(\vec{x}, \vec{x}\,', \vec{x}\,'')$ est le volume du parallélépipède formé par les 3 vecteurs $(\vec{x}, \vec{x}\,', \vec{x}\,'')$. Son unité est le m^3.

▶ Comme on le décrira plus loin, un grand nombre de situations sont dotées de propriétés de symétrie. Dans ces cas il est intéressant d'utiliser des coordonnées qui permettent de les exploiter au mieux. Il y a deux systèmes de coordonnées particulièrement intéressantes.

▶ Les coordonnées cylindriques. À partir de la base cartésienne $\left(\vec{k}_x, \vec{k}_y, \vec{k}_z\right)$ on fabrique les vecteurs

$$\vec{k}_r = \sin\vartheta\ \vec{k}_y + \cos\vartheta\ \vec{k}_x,\ \ \vec{k}_\theta = \cos\vartheta\ \vec{k}_y - \sin\vartheta\ \vec{k}_x,\ \ \vec{k}_z = \vec{k}_z$$

et ainsi un vecteur position peut être spécifié comme $\vec{x} = z\ \vec{k}_z + r\ \vec{k}_r$ par les coordonnées (r, ϑ, z) où $r > 0$ et $\vartheta \in]0, 2\,\pi[$. Cette façon de procéder a l'inconvénient d'exclure le demi-plan $\left\{z\ \vec{k}_z + x\ \vec{k}_x\ :\ x \geq 0,\ z \in \mathbb{R}\right\}$ mais les avantages qu'elle apporte l'emporte sur cet inconvénient dans la pratique.

L'espace E_3, ses coordonnées

- Les coordonnées sphériques, on fabrique cette fois les vecteurs
$$\vec{k}_r = \left(\sin\psi\ \vec{k}_y + \cos\psi\ \vec{k}_x\right)\ \sin\vartheta + \cos\vartheta\ \vec{k}_z$$
$$\vec{k}_\theta = \left(\sin\psi\ \vec{k}_y + \cos\psi\ \vec{k}_x\right)\ \cos\vartheta - \sin\vartheta\ \vec{k}_z$$
$$\vec{k}_\psi = \cos\psi\ \vec{k}_y - \sin\psi\ \vec{k}_x$$
avec lesquels la position est repérée par $\vec{x} = r\ \vec{k}_r$ par les coordonnées (r, ϑ, ψ) où $r > 0$, $\vartheta \in]0, \pi[$ et $\psi \in]0, 2\ \pi[$. Ces coordonnées souffrent du même inconvénient que les coordonnées cylindiques, le demi-plan $\left\{z\ \vec{k}_z + x\ \vec{k}_x\ :\ x \geq 0,\ z \in \mathbb{R}\right\}$ est exclu.

- Le calcul des produits scalaire, vectoriel et mixte dans ces coordonnées conduit à des expressions un peu sordides dasn le cas général. Mais en principe ce n'est pas dans le cas général qu'on les utilise.

Géométrie : Qu'est-ce qu'un domaine ?

► Partons de l'énoncé : φ est une application d'un domaine D borné, connexe et simplement connexe de l'espace euclidien E_3 dans $\mathbb{R}$

► On doit comprendre que D est un sous-ensemble ouvert de E_3 (domaine)
$\forall\, \vec{x} \in D\ :\ \exists\, \varepsilon > 0\ :\ \forall\, \vec{y} \in \{\vec{z}\ :\ |\vec{z} - \vec{x}| < \varepsilon\}\ :\ \vec{y} \in D$
► que chacun des points de D est situé à une distance finie de l'origine (borné) : $\forall\, \vec{x} \in D\ :\ |\vec{x}| < \infty$
► Que pour tout couple de points de D, on peut trouver une ligne continue joignant ces deux points telle que tous les points de cette ligne appartiennent à D $\rightarrow$ écrire cela en termes mathématiques
► Qu'une ligne ou une nappe dont tous les points appartiennent à D doivent pouvoir être déformées continûment de manière à pouvoir se réduire à un point tout en restant dans D $\rightarrow$ là l'écriture en termes mathématiques est nettement plus difficile.

Géométrie : Qu'est-ce qu'un domaine ?

- Un des attendus des mathématiques est de fournir les moyens de réaliser une description telle que celle d'un domaine borné, connexe et simplement connexe qui ne soit pas vague.

- Idéalement, on devrait placer un cours de mathématiques préalable à toute discipline utilisant des notions mathématiques. Rendez-vous dans... quelques années pour pouvoir aborder sereinement le contenu de cet enseignement !.

- Bien évidemment, s'il faut aller vers l'idéal on se doit aussi de tenter de comprendre le réel, au prix d'accepter le vague.

- Pour le domaine, le vague consiste se représenter un domaine borné, connexe et simplement connexe comme un ensemble de points spécifiés de façon paramétrique ou définis de façon implicite.

Géométrie : Représentation paramétrique d'un domaine borné, connexe et simplement connexe

- On donne une application $\vec{\Xi} \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & E_3 \\ (\xi,\iota,\zeta) & \longrightarrow & \vec{\Xi}(\xi,\iota,\zeta) \end{array}$ qui est bijective, différentiable, d'inverse différentiable (un difféomorphisme) sur tout $\mathbb{R}^3$ puis le cube $C = \left\{(\xi,\iota,\zeta) \; : \; (\xi,\iota,\zeta) \in]0,1[^3\right\}$

  l'image $\vec{\Xi}(C)$ est un domaine borné, connexe et simplement connexe.

- Par exemple, un tronçon de cylindre de hauteur L et et rayon R auquel on a retiré les points de son intersection avec le demi-plan $\left\{z\,\vec{k}_z + x\,\vec{k}_x \; : \; x > 0\right\}$ est défini par

  $\vec{\Xi}(\xi,\iota,\zeta) = L\,\zeta\,\vec{k}_z + R\,\xi\,\left(\sin(2\,\iota\,\pi)\,\vec{k}_y + \cos(2\,\iota\,\pi)\,\vec{k}_x\right)$

  ou encore la boule de rayon R (sans les points du demi-plan précédent) par $\vec{\Xi}(\xi,\iota,\zeta) =$

  $R\,\xi\,\left(\sin(\iota\,\pi)\,\left(\sin(2\,\pi\,\zeta)\,\vec{k}_y + \cos(2\,\pi\,\zeta)\,\vec{k}_x\right) + \cos(\iota\,\pi)\,\vec{k}_z\right)$

Géométrie : Représentation implicite d'un domaine borné, connexe et simplement connexe

- L'éviction des points du demi-plan est embêtante mais elle est inhérente à la description paramétrique.

- C'est un inconvénient dont ne souffre pas la description implicite des domaines. Celle-ci consiste à introduire une fonction $F \ : \ E_3 \ \longrightarrow \ \mathbb{R}$ puis l'ensemble $F_\varepsilon = \{\vec{x} \in E_3 \ : \ -\varepsilon \ < \ F(\vec{x}) \ < \ \varepsilon\}$. Pour un $\epsilon > 0$ donné, F est supposée continue et différentiable pour les points de F_ε ainsi que non singulière, i.e. $\vec{\nabla} F(\vec{x}) \neq 0$. Le domaine D est alors défini comme
$D = \{\vec{x} \in E_3 \ : \ F(\vec{x}) < 0\}$

- La boule est alors décrite par $F(\vec{x}) = |\vec{x}|^2 - R^2$. Pour le tronçon de cylindre, on peut utiliser deux fonctions comme $F(\vec{x}) = \left|\vec{x} \times \vec{k}_z\right|^2 - R^2$ et $G(\vec{x}) = \left(\vec{k}_z \cdot \vec{x}\right)\ \left(\vec{k}_z \cdot \vec{x} - L\right)$ pour obtenir $D = \{\vec{x} \ : \ F(\vec{x}) < 0, \ G(\vec{x}) < 0\}$

Géométrie : le bord du domaine borné, connexe et simplement connexe

- Un domaine D étant donné, un points $\vec{x} \in E_3$ peut : être élément du domaine $\vec{x} \in D$; ne pas l'être et de plus n'avoir aucun voisin qui le soit (on peut trouver une boule de centre $\vec{x}$ et de rayon ϵ suffisamment petit pour qu'aucun point de la boule n'appartienne à D) ; ou, finalement,
être tel que pour toute boule de centre $\vec{x}$ et de rayon ϵ, si petit soit ϵ, la boule contient des points de D et des points qui n'y sont pas.

- Les points de cette dernière catégorie constituent les points de ∂D, le bord de D.

- Si D est défini de façon paramétrique, ∂D est la réunion des 6 nappes $\left\{\lim_{\varepsilon \to 0} \vec{\Xi}(\xi, \iota, \varepsilon) \;:\; (\xi, \iota) \in]0,1[^2\right\}$,
$\left\{\lim_{\varepsilon \to 0} \vec{\Xi}(\xi, \iota, 1-\varepsilon) \;:\; (\xi, \iota) \in]0,1[^2\right\}$, ...
auxquelles il faut ajouter les 12 lignes
$\left\{\lim_{\varepsilon \to 0} \vec{\Xi}(\xi, \varepsilon, \varepsilon) \;:\; \xi \in]0,1[\right\}$. ...

Géométrie : la normale au bord, dirigée vers l'extérieur du domaine

- Si D est défini de façon implicite avec une seule fonction, $\partial D = \{\vec{x} \ : \ F(\vec{x}) = 0\}$. Avec deux fonctions c'est $\partial D = \{\vec{x} \ : \ (F(\vec{x}) = 0 \ \text{ et } \ G(\vec{x}) \leq 0) \ \text{ ou } \ (G(\vec{x}) = 0 \ \text{ et } \ F(\vec{x}) \leq 0)\}$

- Le bord ∂D d'un domaine D est une surface de E_3 qui admet en la plupart de ses points $\vec{x} \in \partial D$ un vecteur normal. C'est à dire un vecteur $\vec{n} \in E_3 (1)$ tel que la distance entre $\vec{x} + \varepsilon \ \vec{n}$ et ∂D soit la plus grande possible pour ϵ petit et fixé. Faire des dessins.

- Ce vecteur $\vec{n}$ n'est pas bien défini là où la surface présente une arête. On verra que dans la pratique ce n'est pas trop gênant aussi ne s'attarde-t'on pas sur ce cas.

- Là où la surface est bien lisse le vecteur $\vec{n}$ est cette fois défini au sens près. Il peut pointer vers l'intérieur du domaine D ou vers l'extérieur. Par convention, la normale à un bord de domaine est toujours choisie de façon à pointer vers l'extérieur du domaine. C'est pour cela qu'on l'appelle la normale extérieure.

Géométrie : calcul de la normale à un bord de domaine

- Dans le cas où le domaine est défini de façon implicite $D = \{\vec{x} \ : \ F(\vec{x}) < 0\}$, la normale extérieure au bord $\partial D = \{\vec{x} \ : \ F(\vec{x}) = 0\}$ est $\vec{n} = \frac{\vec{\nabla} F(\vec{x})}{\left|\vec{\nabla} F(\vec{x})\right|}$ Les précautions prises pour définir F (cf. planche 10) font que la normale est toujours bien définie et elle est bien dirigée vers l'extérieur.

- Dans le cas d'une définition paramétrique $D = \left\{\vec{\Xi}(\xi, \iota, \zeta) \ : \ (\xi, \iota, \zeta) \in]0, 1[^3\right\}$, pour la partie $\left\{\vec{\Xi}(\xi, \iota, \zeta = 0) \ : \ (\xi, \iota) \in]0, 1[^2\right\}$ (supposée lisse), la normale est $\vec{n} = \frac{\partial_\xi \vec{\Xi} \times \partial_\iota \vec{\Xi}}{\left|\partial_\xi \vec{\Xi} \times \partial_\iota \vec{\Xi}\right|}$ Les précautions prises pour définir $\vec{\Xi}$ (cf. planche 9) font que la normale est toujours bien définie et elle est bien dirigée vers l'extérieur.

Géométrie : les surfaces

- Les bords de domaines sont des surfaces particulières parmi les surfaces qui peuvent être définie dans $E3$.
- Celles-ci peuvent être définies de façon paramétrique, par une application $\begin{array}{cccc} \vec{\Xi} & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & E_3 \\ & & (\xi,\iota) & \longrightarrow & \vec{\Xi}(\xi,\iota) \end{array}$
à laquelle on demande d'être différentiable comme $S = \left\{\vec{\Xi}(\xi,\iota) \ : \ (\xi,\iota) \in]0,1[^2\right\}$. Pour simplifier, on suppose que la surface ne comporte pas de singularité, i.e.
$(\xi,\iota) \in]0,1[\Longrightarrow \partial_\xi \vec{\Xi} \times \partial_\iota \vec{\Xi} \neq \vec{0}$ et on demande également que l'application soit injective sur $]0,1[^2$
- Elle peuvent également être définie de façon implicite comme les bords de domaines.
- Comme les bords de domaine, elle sont dotées de vecteurs normaux, mais comme elle ne sont pas nécessairement un bord de domaine, le choix de sa direction est arbitraire.

Géométrie : les surfaces

- Une surface est orientable quand elle peut être dotée d'une application $\begin{array}{rccc} \vec{n} & : & S & \longrightarrow & E_3(1) \\ & & \vec{x} & \longrightarrow & \vec{n}(\vec{x}) \end{array}$ où $\vec{n}(\vec{x})$ est le vecteur normal en $\vec{x}$ qui est continue. Penser au ruban de Moebius pour une surface qui n'a pas cette propriété.

- (En dérivant plusieurs fois le vecteur normal par rapport aux (ξ, ι) on arrive au repère mobile de Weingarten sur la surface.)

- Le bord d'une surface est l'ensemble des points qui n'appartiennent pas à la surface mais qui sont tels que toute boule dont ils sont les centres comporte des points appartenant à la surface.

- Quand il n'y a pas de tels point on dit que la surface n'a pas de bord. Et quand elle n'a pas de bord, elle peut être une candidate à être le bord d'un domaine (je ne suis pas sûr qu'elle le soit nécessairement).

Géométrie : les lignes

- Les bords de surface sont des lignes, mais toutes les lignes de E_3 ne sont pas des bords de de surface.

- Paramétriquement, une ligne est définie par une application
$$\begin{array}{ccccc} \vec{\Xi} & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & E_3 \\ & & \zeta & \longrightarrow & \vec{\Xi}(\zeta) \end{array}$$
à laquelle on demande d'être différentiable comme $L = \left\{ \vec{\Xi}(\zeta) \ : \ \zeta \in]0,1[\right\}$ et on demande également que l'application soit injective sur $]0,1[$

- Chaque point de la ligne est doté d'un vecteur tangent $\vec{\tau} = \frac{d\,\tilde{\Xi}}{d\,\zeta}(\zeta)$ (en dérivant ce vecteur plusieurs fois on arrive au repère mobile de Frenet sur la ligne).

Géométrie : les lignes

- Le bord d'une ligne est constitué des points qui n'appartiennent pas à la ligne mais qui sont tels que toute boule dont ils sont les centres comporte des points appartenant à la ligne.
- Quand il y a de tels points ce sont les extrémités $\lim_{\varepsilon \to 0} \vec{\Xi}(\varepsilon)$ et $\lim_{\varepsilon \to 0} \vec{\Xi}(1-\varepsilon)$ de la ligne.
- Et ces points peuvent ne pas exister, la ligne peut alors soit être le bord d'une surface, soit ne pas l'être. Comme le nœud ne l'est pas

Champs de scalaires, vecteurs et tenseurs d'ordre 2.

▶ Un domaine D borné, connexe et simplement connexe est donné. Un champ de scalaires est une application

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & D & \longrightarrow & \mathbb{R}\,(\text{Unité}) \\ & & \vec{x} & \longrightarrow & \varphi\,(\vec{x}) \end{array}$$

Un champ de vecteurs une application

$$\begin{array}{cccc} \vec{a} & : & D & \longrightarrow & E_3\,(\text{Unité}) \\ & & \vec{x} & \longrightarrow & \vec{a}\,(\vec{x}) \end{array}$$

et un champ de tenseurs d'ordre 2 une application

$$\begin{array}{cccc} \underline{\underline{\sigma}} & : & D & \longrightarrow & \mathcal{L}(E_3)\,(\text{Unité}) \\ & & \vec{x} & \longrightarrow & \underline{\underline{\sigma}}\,(\vec{x}) \end{array}$$

▶ Les domaines d'arrivée de ces applications sont $\mathbb{R}\,(\text{Unité})$ les nombres dotés d'une unité physique ; $E_3\,(\text{Unité})$ les vecteurs (partageant avec E_3 la direction mais pas nécessairement la longueur qui a une unité qui peut être différente du mètre) et les endomorphismes de E_3 dotés également d'une unité.

Les champs en coordonnées cartésiennes

► Si on donne une base orthonormée $\left(\vec{k}_x, \vec{k}_y, \vec{k}_z\right)$, les points de E_3 s'écrivent $\vec{x} = z\ \vec{k}_z + y\ \vec{k}_y + x\ \vec{k}_x$.

► Les champs de scalaires ont alors pour forme $\varphi\left(\vec{x}\right) = \tilde{\varphi}\left(x, y, z\right)$ où $\tilde{\varphi}\ :\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonction à plusieurs variables qui représente φ dans ce système de coordonnées. Bien souvent on commet l'abus de notations $\tilde{\varphi}\left(x, y, z\right) = \varphi\left(x, y, z\right)$.

► Les champs de vecteurs ont la forme
$\vec{a}\left(\vec{x}\right) = a_z\left(x, y, z\right)\ \vec{k}_z + a_y\left(x, y, z\right)\ \vec{k}_y + a_x\left(x, y, z\right)\ \vec{k}_x$ où les $\left(a_x, a_y, a_z\right)$ sont des fonctions $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ qui représentent $\vec{a}$ dans le système de coordonnées. Il est également commode d'écrire

$$\vec{a}\left(\vec{x}\right) = {}^t\,\vec{k}\ a \ \text{ avec } \ \vec{k} = \begin{pmatrix} \vec{k}_x \\ \vec{k}_y \\ \vec{k}_z \end{pmatrix}\ ;\ a = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

où " ^{t}" indique la transposition, ici du vecteur colonne. Et où on n'a pas indiqué les dépendances en x, y, z.

Les champs en coordonnées cartésiennes

- Pour décrire les endomorphismes, il est intéressant d'introduire le produit dyadique de deux vecteurs comme $]\vec{x},\vec{x}\,'[$ qui est l'endomorphisme tel que $]\vec{x},\vec{x}\,'[\quad : \quad \begin{array}{ccc} E_3 & \longrightarrow & E_3 \\ \vec{x}\,'' & \longrightarrow & \left(\vec{x}\,'\cdot\vec{x}\,''\right)\ \vec{x} \end{array}$
on note souvent sous forme d'opérateur $]\vec{x},\vec{x}\,'[\,\vec{x}\,'' = (\vec{x}\,'\cdot\vec{x}\,'')\ \vec{x}$

- Le produit dyadique permet d'exprimer les 9 vecteurs de base de l'espace des endomorphismes de E_3 qui sont
$\left]\vec{k}_x,\vec{k}_x\right[,\ \left]\vec{k}_y,\vec{k}_y\right[,\ \left]\vec{k}_z,\vec{k}_z\right[$ puis
$\left]\vec{k}_x,\vec{k}_y\right[,\ \left]\vec{k}_y,\vec{k}_x\right[,\ \left]\vec{k}_y,\vec{k}_z\right[,\ \left]\vec{k}_z,\vec{k}_y\right[,\ \left]\vec{k}_z,\vec{k}_x\right[,\ \left]\vec{k}_x,\vec{k}_z\right[$ et ainsi d'écrire
$$\underline{\underline{\sigma}}\,(\vec{x}) = \sum_{(i,j)\in\{x,y,z\}^2} \sigma_{ij}\,(x,y,z)\ \left]\vec{k}_i,\vec{k}_j\right[$$
où les σ_{ij} sont des fonctions $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ qui représentent $\underline{\underline{\sigma}}$ dans le système de coordonnées.

Les champs en coordonnées cartésiennes

- Si $\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$ on obtient

$$\underline{\underline{\sigma}}\,\vec{a} = {}^t\,\vec{k}\;\sigma\;a$$

en reprenant la notation a en composantes et sous forme de vecteur colonne (cf. planche 15) de $\vec{a}$ et en utilisant la notation matricielle σ pour l'endomorphisme $\underline{\underline{\sigma}}$.

- Ce qui fait que les calculs se ramènent à de l'algèbre linéaire dans $\mathbb{R}^3$.

- Les notions n'ont pas été d'emblée placée dans ce cadre parce il est plus simple d'utiliser des objets indépendant de tout système de coordonnées comme ψ, $\vec{a}$, $\underline{\underline{\sigma}}$ pour exprimer les différentes propriétés qui vont être énumérées que leurs représentants $\tilde{\varphi}$, a et σ.

- Mais bien évidemment, dans les problèmes pratiques, on finit toujours par utiliser les coordonnées.

Intégration d'un champ de scalaires sur un domaine

▶ L'intégration d'un champ de scalaire défini sur un domaine se note $\int_D \varphi \, dV$ et, dans le cas où le domaine est défini paramétriquement (cf. planche 9), se calcule comme

$$\int_D \varphi \, dV = \int_0^1 d\xi \int_0^1 d\iota \int_0^1 d\zeta \; J \, \tilde{\varphi}(X, Y, Z)$$

où, les $X, \; Y, \; Z$ sont les composantes

$\Xi(\xi, \iota, \zeta) = Z(\xi, \iota, \zeta) \; \vec{k}_z + Y(\xi, \iota, \zeta) \; \vec{k}_y + X(\xi, \iota, \zeta) \; \vec{k}_x$
le jacobien est

$J = \left(\partial_\xi \vec{\Xi}, \partial_\iota \vec{\Xi}, \partial_\zeta \vec{\Xi}\right)$ (le produit mixte des dérivées partielles de $\vec{\Xi}$ par rapport aux (ξ, ι, ζ))

et où on a omis la dépendance en (ξ, ι, ζ) dans les $X, \; Y, \; Z$ de la formule.

Le flux d'un champ de vecteurs à travers une surface

- Une surface S orientable, de normale $\vec{n}$ étant donnée, ainsi qu'un champ de vecteurs $\vec{a}$ dans un domaine contenant cette surface, le flux de ce champ à travers la surface se note $\int_S \vec{a} \cdot \vec{n}\, dS$ et le flux se calcule comme

$$\int_S \vec{a} \cdot \vec{n}\, dS = \int_0^1 d\iota \int_0^1 d\xi\ J\ \left(a_z\ nz + a_y\ ny + a_x\ nx\right)$$

où $\vec{n} = n_z\ \vec{k}_z + n_y\ \vec{k}_y + n_x\ \vec{k}_x$ les (n_x, n_y, n_z) comme les (a_x, a_y, a_z) (composantes de $\vec{a}$) ayant pour argument les (X, Y, Z) qui sont elles-même les composantes de
$\vec{\Xi}\,(\xi, \iota) = Z\,(\xi, \iota)\ \vec{k}_z + Y\,(\xi, \iota)\ \vec{k}_y + X\,(\xi, \iota)\ \vec{k}_x$

et $J = \left|\partial_\xi \vec{\Xi} \times \partial_\iota \vec{\Xi}\right|$

La circulation d'un champ de vecteurs le long d'une ligne

► Une ligne L de tangente $\vec{\tau}$ étant donnée, ainsi qu'un champ de vecteurs $\vec{a}$ dans un domaine contenant cette ligne, la circulation de ce champ le long de la ligne se note $\int_L \vec{a}\cdot\vec{\tau}\; dL$ et se calcule, avec la paramétrisation de la ligne, comme

$$\int_L \vec{a}\cdot\vec{\tau}\; dL = \int_0^1 d\zeta\; J\;\left(a_z\;\tau_z + a_y\;\tau_y + a_x\;\tau_x\right)$$

où $\vec{\tau} = \tau_z\;\vec{k}_z + \tau_y\;\vec{k}_y + \tau_x\;\vec{k}_x$ les (τ_x, τ_y, τ_z) comme les (a_x, a_y, a_z) (composantes de $\vec{a}$) ayant pour argument les (X, Y, Z) qui sont elles-même les composantes de
$\vec{\Xi}\,(\zeta) = Z\,(\zeta)\;\vec{k}_z + Y\,(\zeta)\;\vec{k}_y + X\,(\zeta)\;\vec{k}_x$

et $J = \left|\frac{d\,\vec{\Xi}}{d\,\zeta}\right|$

L'opérateur gradient appliqué à un champ scalaire

- On suppose les champs différentiables autant de fois qu'on les dérivera.

- Le gradient d'un champ de scalaires

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & D & \longrightarrow & \mathbb{R}\,(\text{Unité}) \\ & & \vec{x} & \longrightarrow & \varphi(\vec{x}) \end{array} \quad \text{est un champ de vecteurs}$$

$$\begin{array}{cccc} \vec{\nabla}\varphi & : & D & \longrightarrow & E_3\,(\text{Unité/mètre}) \\ & & \vec{x} & \longrightarrow & \vec{\nabla}\varphi(\vec{x}) \end{array} \quad \text{tel que}$$

$$\varphi(\vec{x}+\delta\vec{x}) = \varphi(\vec{x}) + \delta\vec{x}\cdot\vec{\nabla}\varphi(\vec{x}) + o(\delta\vec{x})$$

où la fonction $o \; : \; E_3 \longrightarrow \mathbb{R}$ est telle que $\displaystyle\lim_{|\delta\vec{x}|\to 0} \frac{o(\delta\vec{x})}{|\delta\vec{x}|} = 0$

- En composantes, le gradient s'écrit

$$\vec{\nabla}\varphi = \partial_z\tilde{\varphi}\;\vec{k}_z + \partial_y\tilde{\varphi}\;\vec{k}_y + \partial_x\tilde{\varphi}\;\vec{k}_x$$

L'opérateur gradient appliqué à un champ scalaire

► Une définition intrinsèque du gradient est que le gradient $\vec{\nabla}\varphi$ d'un champ de scalaires φ est le champ de vecteurs tel que pour toute ligne L de bord $\partial L = \{P_-, P_+\}$ sa circulation le long de la ligne L est égal à la différence des valeurs de φ aux points de ∂L

$$\int_L \vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{\tau}\, dL = \varphi(P_+) - \varphi(P_-)$$

► Dans le cas où les lignes n'ont pas de bord, on obtient que la circulation le long de toute ligne sans bord est nulle $\int_L \vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{\tau}\, dL = 0$

► On peut montrer que la propriété est vraie à partir des définitions précédentes du gradient mais là on ajoute que c'est une façon de définir le gradient. Et donc que ses définitions précédentes se déduisent d'elle.

L'opérateur gradient appliqué à un champ de vecteurs

- Comme pour le champ de scalaire, le gradient d'un champ de scalaires $\begin{array}{cccc} \vec{a} & : & D & \longrightarrow & E_3\,(\text{Unité}) \\ & & \vec{x} & \longrightarrow & \varphi\,(\vec{x}) \end{array}$ est un champ de tenseur $\begin{array}{cccc} \underline{\underline{\nabla}}\vec{a} & : & D & \longrightarrow & \mathcal{L}(E_3)\,(\text{Unité/mètre}) \\ & & \vec{x} & \longrightarrow & \vec{\nabla}\vec{a}(\vec{x}) \end{array}$ tel que

$$\vec{a}\,(\vec{x}+\delta\vec{x}) = \vec{a}\,(\vec{x}) \ + \ \left(\underline{\underline{\nabla}}\vec{a}\,(\vec{x})\right) \ \delta\vec{x} \ + \ \vec{o}\,(\delta\vec{x})$$

où la fonction $\vec{o} \ : \ E_3 \longrightarrow E_3$ est telle que

$$\lim_{|\delta\vec{x}|\to 0} \frac{|\vec{o}\,(\delta\vec{x})|}{|\delta\vec{x}|} = 0$$

- Et en composantes

$$\underline{\underline{\nabla}}\vec{a}\,(\vec{x}) = \sum_{(i,j)\in\{x,y,z\}^2} \frac{\partial a_i}{\partial j}\,(x,y,z) \ \Big]\vec{k}_i, \vec{k}_j\Big[$$

L'opérateur divergence appliqué à un champ de vecteurs

- Le gradient d'un champ de vecteurs est un champ d'endomorphismes de E_3. En chaque point, l'endomorphisme admet trois invariants : la trace, le déterminant et le second invariant. Pour l'instant, on ne s'intéresse qu'aux relations linéaires, ce qui exclut le déterminant et le second invariant qui sont respectivement cubiques et quadratiques par rapport aux dérivées partielles des composantes du champ de vecteurs.

- La trace est ce qu'on appelle la divergence. C'est un champ de scalaires noté $\vec{\nabla}\cdot\vec{a}$ et donc tel que

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{a} = Tr\left(\underline{\underline{\nabla}}\vec{a}\right)$$

- En composantes (à partir de la formule en composantes de la planche 27) c'est

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{a} = \partial_x a_x \; + \; \partial_y a_y \; + \; \partial_z a_z$$

L'opérateur divergence appliqué à un champ de vecteurs

- la divergence admet une définition intrinsèque qui s'appelle la formule de Green-Ostrogradski : la divergence d'un champ de vecteurs $\vec{a}$ est le champ scalaire $\vec{\nabla}\cdot\vec{a}$ tel que pour tout domaine de bord ∂D la somme de $\vec{\nabla}\cdot\vec{a}$ sur D est égal au flux de $\vec{a}$ à travers ∂D, soit

$$\int_D \vec{\nabla}\cdot\vec{a}\, dV = \int_{\partial D} \vec{a}\cdot\vec{n}\, dS$$

- On peut montrer que cette propriété est vraie à partir de la définition précédente de la divergence mais là on ajoute que c'est une façon de définir la divergence. Et donc que cette définition précédente se déduit d'elle.

L'opérateur rotationnel appliqué à un champ de vecteurs

- Si on donne un endomophisme $\underline{\underline{\sigma}}$, sa transposée est l'endomorphisme ${}^t\,\underline{\underline{\sigma}}$ tel que

$$\forall\,\left(\vec{x}\,',\vec{x}\,''\right)\in E_3\times E_3\ :\ \underline{\underline{\sigma}}\,\vec{x}\,'\cdot\vec{x}\,''=\vec{x}\,'\cdot{}^t\,\underline{\underline{\sigma}}\,\vec{x}\,''$$

- En appliquant cela à l'endomorphisme $\underline{\underline{\nabla}}\vec{a}$ et au cas $\vec{x}\,'=\vec{x}\,''$ on obtient que

$$\forall\,\vec{x}\,'\in E_3\ :\ \vec{x}\,'\cdot\left(\underline{\underline{\nabla}}\vec{a}-{}^t\,\underline{\underline{\nabla}}\vec{a}\right)\ \vec{x}\,'=0$$

Il vient alors qu'il existe un vecteur, noté $\vec{\nabla}\times\vec{a}$ tel que

$$\forall\,\vec{x}\,'\in E_3\ :\ \left(\underline{\underline{\nabla}}\vec{a}-{}^t\,\underline{\underline{\nabla}}\vec{a}\right)\ \vec{x}\,'=\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\right)\times\vec{x}\,'$$

- Ce vecteur dépend de la position $\vec{x}$ et donc c'est un champ de vecteur $\begin{array}{cccl}\vec{\nabla}\times\vec{a} & : & E_3 & \longrightarrow & E_3\,(\text{Unité/mètre}) \\ & & \vec{x} & \longrightarrow & \vec{\nabla}\times\vec{a}\end{array}$ appelé le rotationnel de $\vec{a}$.

L'opérateur rotationnel appliqué à un champ de vecteurs

- Les composantes de $\vec{\nabla}\times\vec{a}$ sont (cf. planche 27)

$$\vec{\nabla}\times\vec{a} = \left(\partial_y a_z - \partial_z a_y\right)\ \vec{k}_x\ +\ \left(\partial_z a_x - \partial_x a_z\right)\ \vec{k}_y\ +\ \left(\partial_x a_y - \partial_y a_x\right)\ \vec{k}_z$$

- Le rotationnel admet une définition intrinsèque appelée la formule de Stokes : le rotationnel d'un champ de vecteurs $\vec{a}$ est le champs de vecteurs $\vec{\nabla}\times\vec{a}$ tel que pout toute surface S de bord ∂S le flux de $\vec{\nabla}\times\vec{a}$ à travers la surface S est égal à la circulation de $\vec{a}$ le long de ∂S, soit

$$\int_S \vec{\nabla}\times\vec{a}\cdot\vec{n}\, dS = \int_{\partial S} \vec{a}\cdot\vec{\tau}\, dL$$

- En particulier, si la surface S n'a pas de bord, on obtient

$$\int_S \vec{\nabla}\times\vec{a}\cdot\vec{n}\, dS = 0$$

- On peut montrer que cette propriété est vraie à partir de la définition précédente du rotationnel, mais là on ajoute que c'est une façon de définir le rotationnel. Et donc que cette définition précédente se déduit d'elle.

Premières propriétés des opérateurs vectoriels

- On a $\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\varphi\right)=\vec{0}$ et $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\right)=0$

En effet : le flux de $\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\varphi\right)$ à travers une surface quelconque et égal à la circulation de $\vec{\nabla}\varphi$ le long du bord de cette surface, et comme elle est sans bord, on obtient le résultat.
De même la somme de $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\right)$ sur un domaine quelconque est égal au flux de $\vec{\nabla}\times\vec{a}$ à travers le bord de ce domaine, qui est une surface sans bord.

- Si D est un domaine borné, connexe et simplement connexe alors

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{b}=0 \ \text{ dans } \ D \Longrightarrow \exists\ \vec{a}\ :\ \vec{b}=\vec{\nabla}\times\vec{a}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{b}=\vec{0} \ \text{ dans } \ D \Longrightarrow \exists\ \varphi\ :\ \vec{b}=\vec{\nabla}\varphi$$

Ces propriétés, appelés les lemmes de Poincaré, ne sont pas évidentes *a priori*. Le fait que D soit borné, connexe et simplement connexe est important, D'ailleurs sans elles les propriétés sont fausses.

Examen des lemmes de Poincaré

- Dans $\vec{\nabla}\times\vec{b} = \vec{0}$ dans $D \Longrightarrow \exists\, \varphi \ : \ \vec{b} = \vec{\nabla}\varphi$, φ n'est pas défini de façon unique, on peut lui ajouter une constante (dont le gradient est nul) sans que le résultat change. Mais à cette constante près, il est unique.

- De même, dans $\vec{\nabla}\cdot\vec{b} = 0$ dans $D \Longrightarrow \exists\, \vec{a} \ : \ \vec{b} = \vec{\nabla}\times\vec{a}$, $\vec{a}$ n'est pas défini de façon unique, on peut lui ajouter le gradient d'une fonction quelconque (dont le rotationnel est nul) sans que le résultat change.

- Si on a simultanément $\vec{\nabla}\times\vec{b} = \vec{0}$ et $\vec{\nabla}\cdot\vec{b} = 0$ dans D, alors on peut trouver φ et $\vec{a}$ tels que $\vec{b} = \vec{\nabla}\varphi = \vec{\nabla}\times\vec{a}$, d'où

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\right) = \vec{0} \ \text{ et } \ \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\varphi\right) = 0 \ \text{ dans } \ D$$

Ce qui fait apparaître les fonctions harmoniques.

Fonctions harmoniques dans un domaine borné, connexe et simplement connexe

- Une fonction harmonique est une fonction φ telle que $\Delta(\varphi) = 0$ où $\Delta(\varphi) = \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\varphi\right) = \partial^2_{z^2}\tilde{\varphi} + \partial^2_{y^2}\tilde{\varphi} + \partial^2_{x^2}\tilde{\varphi}$

- Ces fonctions possèdent de nombreuses propriétés. Notamment elles sont indéfiniment différentiables et complétement déterminées dans un domaine D dès lors qu'elle sont connues sur le bord de D. C'est à dire que si on donne un problème (de Dirichlet)

$$\Delta(\varphi) = 0 \text{ dans } D \text{ et } \varphi = \varphi_{\partial D} \text{ sur } \partial D$$

où $\varphi_{\partial D} \; : \; \partial D \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction quelconque, alors φ est définie de façon unique dans D.

- Les fonctions harmoniques ont bien d'autres propriétés qui seront exploitées au cas à cas plus loin.

Une synthèse des propriétés de champs de vecteurs dans un domaine borné, connexe et simplement connexe : la décomposition de Hodge-Helmholtz

► En manipulant les propriétés, on se rend compte qu'un champ de vecteur $\vec{b}$ quelconque donné dans un domaine borné, connexe et simplement connexe se décompose de façon unique comme la somme de ces trois termes

$$\vec{b} = \vec{\nabla}\times\vec{a}_0 + \vec{\nabla}\varphi_0 + \vec{\nabla}\varphi$$

où

- $\vec{a}_0$ est un champ de vecteurs (défini à un gradient près puisque le rotationnel d'un gradient est nul) tel que $\vec{a}_0 \times \vec{n} = \vec{0}$ sur ∂D
- φ_0 est un champ de scalaires tel que $\varphi_0 = 0$ sur ∂D
- φ est un champ de scalaires harmonique, tel que $\Delta(\varphi) = 0$ sur ∂D

c'est la décomposition de Hodge-Helmholtz.

Le calcul des éléments de la décomposition de Hodge-Helmholtz d'un champ de vecteurs $\vec{b}$

- La divergence de $\vec{b} = \vec{\nabla}\times\vec{a}_0 + \vec{\nabla}\varphi_0 + \vec{\nabla}\varphi$ associée à la condition demandée à φ_0 sur ∂D conduit au problème (de Poisson)

$$\Delta\left(\varphi_0\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{b} \ \text{ dans } \ D \ ; \ \varphi_0 = 0 \ \text{ sur } \ \partial D$$

qui a une solution unique.

- Le rotationnel de cette relation conduit au problème

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}_0\right) = \vec{\nabla}\times\vec{b} \ \text{ dans } \ D \ ; \ \vec{a}_0 \times n = 0 \ \text{ sur } \ \partial D$$

qui n'a pas de solution unique. Si on en veut une, on ajoute une condition (dite de jauge), par exemple la jauge de Coulomb $\vec{\nabla}\cdot\vec{a}_0 = \vec{0}$, et alors le problème devient

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}_0\right) = \vec{\nabla}\times\vec{b} \ \text{ et } \ \vec{\nabla}\cdot\vec{a}_0 = 0 \ \text{ dans } \ D \ ; \ \vec{a}_0 \times n = 0 \ \text{ sur } \ \partial D$$

qui cette fois a une solution unique.

Le calcul des éléments de la décomposition de Hodge-Helmholtz d'un champ de vecteurs $\vec{b}$ – suite

- Et finalement on obtient le gradient de fonction harmonique par soustraction
$$\vec{\nabla}\varphi = \vec{b} - \vec{\nabla}\times\vec{a}_0 - \vec{\nabla}\varphi_0$$

- Bien évidemment tout cela demande une démonstration qui relève du cours de mathématiques.
Pour le faire proprement, il faut plutôt poser les problèmes permettant les calculs de $\vec{a}_0$ et φ_0 sous forme faible et utiliser le lemme de Lax-Milgram.
On comprendra que cela nous entraînerait trop loin...

- Néanmoins il est demandé de garder en mémoire cette décomposition de Hodge-Helmholtz qui est très utile.

Formules d'analyse vectorielle, d'ordre 1

- Si on donne des champs de vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ ainsi que des champs de scalaires λ et μ

$$\vec{\nabla}(\mu\,\lambda) = \mu\,\vec{\nabla}\lambda + \lambda\,\vec{\nabla}\mu$$
$$\vec{\nabla}\cdot(\lambda\,\vec{a}) = \lambda\,\vec{\nabla}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot\vec{\nabla}\lambda$$
$$\vec{\nabla}\times(\lambda\,\vec{a}) = \lambda\,\vec{\nabla}\times\vec{a} + \vec{\nabla}\lambda\times\vec{a}$$
$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = \vec{\nabla}\times\vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{a}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{b}$$
$$\vec{\nabla}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = {}^t\vec{\vec{\nabla}}\left(\vec{b}\right)\;\vec{a} + {}^t\vec{\vec{\nabla}}(\vec{a})\;\vec{b}$$
$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{b}\,\vec{a} + \underline{\underline{\nabla}}\vec{a}\,\vec{b} - \underline{\underline{\nabla}}\vec{b}\,\vec{a} - \vec{\nabla}\cdot\vec{a}\,\vec{b}$$

- Si $\vec{x}$ est la position et $\vec{\Omega}$ un vecteur constant, on a aussi

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{x}\right) = 2\,\vec{\Omega} \quad ; \quad \vec{\nabla}(|\vec{x}|) = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$$
$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\Omega}\cdot\vec{x}\right) = \vec{\Omega}$$

Formules d'analyse vectorielle, d'ordre 2

- Avec les mêmes conventions que dans la planche précédente

Le laplacien vectoriel est $\vec{\Delta}\ \vec{a} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}\right) - \vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\right)$

Si $\vec{a} = a_z\ \vec{k}_z + a_y\ \vec{k}_y + a_x\ \vec{k}_x$ c'est aussi

$$\vec{\Delta}\ \vec{a} = \Delta\ a_z\ \vec{k}_z + \Delta\ a_y\ \vec{k}_y + \Delta\ a_x\ \vec{k}_x$$

La convention des indices répétés - 1

► Ces formules se retrouvent assez simplement et sans excès d'écriture pourvu qu'on connaisse et sache utiliser la convention des indices répétés.

► Celle-ci consiste à noter les champs de vecteurs comme $\vec{a} = a_i \, \vec{k}_i$ en convenant que le monôme vaut $a_z \, \vec{k}_z + a_y \, \vec{k}_y + a_x \, \vec{k}_x$, c'est à dire que l'indice 'i' étant présent dans deux des termes du produit, on le développe sur ses valeurs $x, \ y, \ z$ en sommant les différents termes obtenus.

► De la même façon, les champs de tenseurs sont notés $\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{ij} \left] \vec{k}_i, \vec{k}_j \right[$ là il y a deux indices répétés en présence, on les développe pareillement pour obtenir la formule de la planche 20 pour la représentation du tenseur en coordonnées cartésiennes.

La convention des indices répétés - 2

- le symbole de Kronecker est $\delta_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$. Il permet par exemple de construire l'endomophisme identité comme $\underline{\underline{Id}} = \delta_{ij} \left] \vec{k}_i, \vec{k}_j \right[$
- Un autre « symbole » est celui de Levy-Civita

$$\varepsilon_{ijk} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } (i, j, k) \in \{(x, y, z), (y, z, x), (z, x, y)\} \\ -1 & \text{si } (i, j, k) \in \{(z, y, x), (y, x, z), (x, z, y)\} \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$$

Lorsque deux quelconques des indices sont identiques, il vaut 0. Sinon les indices sont une permutation paire de (x, y, z) et alors il vaut 1 ; et -1 pour une permutation impaire.
Cela permet, par exemple, de construire le produit vectoriel comme $\vec{a} \times \vec{b} = \varepsilon_{ijk}\ a_j\ b_k\ \vec{k}_i$

La convention des indices répétés - 3

- Par sa définition $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} = \epsilon_{kij}$ et $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}$ et on a la formule utile

$$\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\,\delta_{km} - \delta_{jm}\,\delta_{kl}$$

- On convient de plus d'introduire la virgule ',' dans la liste des indices qu'on manipule avec la convention que ceux des indices qui sont situés derrière une virgule dénotent la dérivation. Par exemple, le gradient s'écrit

$$\vec{\nabla}\varphi = \varphi_{,i}\,\vec{k}_i$$

la divergence

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{a} = a_{i,i}$$

et le rotationnel

$$\vec{\nabla}\times\vec{a} = \epsilon_{ijk}\,a_{k,j}\,\vec{k}_i$$

Attention c'est bien $a_{k,j}$ et pas $a_{j,k}$!

La convention des indices répétés - 4

- Voilà ! C'est suffisant pour retrouver les formules d'analyse vectorielle.

- Par exemple

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) &= \epsilon_{ijk}\,\left(\epsilon_{klm}\,a_l\,b_m\right)_{,j}\,\vec{k}_i \\
&= \epsilon_{ijk}\,\epsilon_{klm}\,\left(a_l\,b_{m,j}+b_m\,a_{l,j}\right)\,\vec{k}_i \\
&= \epsilon_{kij}\,\epsilon_{klm}\,\left(a_l\,b_{m,j}+b_m\,a_{l,j}\right)\,\vec{k}_i \\
&= \left(\delta_{il}\,\delta_{jm}-\delta_{im}\,\delta_{jl}\right)\,\left(a_l\,b_{m,j}+b_m\,a_{l,j}\right)\,\vec{k}_i \\
&= \left(a_i\,b_{j,j}+b_j\,a_{i,j}-a_j\,b_{i,j}-b_i\,a_{j,j}\right)\,\vec{k}_i \\
&= \vec{\nabla}\cdot\vec{b}\,\vec{a}+\underline{\underline{\nabla}}\vec{a}\,\vec{b}-\underline{\underline{\nabla}}\vec{b}\,\vec{a}-\vec{\nabla}\cdot\vec{a}\,\vec{b}
\end{aligned}
$$

- On s'entraînera sur les autres formules (qui sont moins difficiles).

Opérateurs différentiels en coordonnées cylindriques

$$\vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial_\vartheta \varphi \, \vec{k}_\theta}{r} + \partial_z \varphi \, \vec{k}_z + \partial_r \varphi \, \vec{k}_r$$

Pour $\vec{a} = a_z \, \vec{k}_z + a_\vartheta \, \vec{k}_\theta + a_r \, \vec{k}_r$

$$\vec{\nabla}\times\vec{a} =$$
$$\left(\frac{\partial_\vartheta a_z}{r} - \partial_z a_\vartheta\right) \, \vec{k}_r + \left(\frac{a_\vartheta}{r} + \partial_r a_\vartheta - \frac{\partial_\vartheta a_r}{r}\right) \, \vec{k}_z + \left(\partial_z a_r - \partial_r a_z\right) \, \vec{k}_\theta$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{a} = \frac{\partial_\vartheta a_\vartheta}{r} + \frac{a_r}{r} + \partial_z a_z + \partial_r a_r$$

$$\underline{\underline{\nabla}}\vec{a} = \sum_{(i,j)\in\{r,\vartheta,z\}^2} a_{ij} \left]\vec{k}_i, \vec{k}_j\right[\text{ où } (a_{ij}) = \begin{pmatrix} \partial_r a_r & \frac{\partial_\vartheta a_r - a_\vartheta}{r} & \partial_z a_r \\ \partial_r a_\vartheta & \frac{\partial_\vartheta a_\vartheta + a_r}{r} & \partial_z a_\vartheta \\ \partial_r a_z & \frac{\partial_\vartheta a_z}{r} & \partial_z a_z \end{pmatrix}$$

$$\Delta(\varphi) = \frac{\partial_r \varphi}{r} + \frac{\partial^2_{\vartheta^2}\varphi}{r^2} + \partial^2_{z^2}\varphi + \partial^2_{r^2}\varphi$$

$$\vec{\Delta}(\vec{a}) = \begin{cases} \left(\dfrac{\partial_r a_z}{r} + \dfrac{\partial^2_{\vartheta^2} a_z}{r^2} + \partial^2_{z^2} a_z + \partial^2_{r^2} a_z\right) \, \vec{k}_z \\ \left(\dfrac{\partial_r a_\vartheta}{r} + \dfrac{\partial^2_{\vartheta^2} a_\vartheta}{r^2} + \dfrac{2 \, \partial_\vartheta a_r}{r^2} + \partial^2_{z^2} a_\vartheta + \partial^2_{r^2} a_\vartheta - \dfrac{a_\vartheta}{r^2}\right) \, \vec{k}_\theta \\ \left(\dfrac{\partial_r a_r}{r} + \dfrac{\partial^2_{\vartheta^2} a_r}{r^2} + \partial^2_{z^2} a_r + \partial^2_{r^2} a_r - \dfrac{2 \, \partial_\vartheta a_\vartheta}{r^2} - \dfrac{a_r}{r^2}\right) \, \vec{k}_r \end{cases}$$

Opérateurs différentiels en coordonnées sphériques

$$\vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial_\psi \varphi \ \vec{k}_\psi}{r \ \sin\vartheta} + \frac{\partial_\vartheta \varphi \ \vec{k}_\theta}{r} + \partial_r \varphi \ \vec{k}_r$$

Pour $\vec{a} = a_\vartheta \ \vec{k}_\theta + a_r \ \vec{k}_r + a_\psi \ \vec{k}_\psi$

$$\vec{\nabla}\times\vec{a} = \begin{cases} \left(\frac{a_\psi \ \cos\vartheta}{r \ \sin\vartheta} + \frac{\frac{\partial a_\psi}{\partial\vartheta}}{r} - \frac{\partial_\psi a_\vartheta}{r \ \sin\vartheta}\right) \ \vec{k}_r \\ \left(\frac{\partial_\psi a_r}{r \ \sin\vartheta} - \frac{a_\psi}{r} - \frac{\partial a_\psi}{\partial r}\right) \ \vec{k}_\theta \\ \left(\frac{a_\vartheta}{r} + \partial_r a_\vartheta - \frac{\partial_\vartheta a_r}{r}\right) \ \vec{k}_\psi \end{cases}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{a} = \frac{a_\vartheta \ \cos\vartheta}{r \ \sin\vartheta} + \frac{\frac{\partial a_\psi}{\partial\psi}}{r \ \sin\vartheta} + \frac{\partial_\vartheta a_\vartheta}{r} + \frac{2 \ a_r}{r} + \partial_r a_r$$

$$\underline{\underline{\nabla}}\vec{a} = \sum_{(i,j)\in\{r,\vartheta,\psi\}^2} a_{ij} \ \left]\vec{k}_i, \vec{k}_j\right[\text{ où}$$

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} \partial_r a_r & \frac{\partial_\vartheta a_r}{r} - \frac{a_\vartheta}{r} & \frac{\partial_\psi a_r}{r \ \sin\vartheta} - \frac{a_\psi}{r} \\ \partial_r a_\vartheta & \frac{\partial_\vartheta a_\vartheta}{r} + \frac{a_r}{r} & \frac{\partial_\psi a_\vartheta}{r \ \sin\vartheta} - \frac{a_\psi \ \cos\vartheta}{r \ \sin\vartheta} \\ \frac{\partial a_\psi}{\partial r} & \frac{\frac{\partial a_\psi}{\partial\vartheta}}{r} & \frac{a_\vartheta \ \cos\vartheta}{r \ \sin\vartheta} + \frac{\frac{\partial a_\psi}{\partial\psi}}{r \ \sin\vartheta} + \frac{a_r}{r} \end{pmatrix}$$

Opérateurs différentiels en coordonnées sphériques

$$\Delta\left(\varphi\right) = \frac{\partial_{\vartheta}\varphi\ \cos\vartheta}{r^2\ \sin\vartheta} + \frac{\partial^2_{\psi^2}\varphi}{r^2\ \sin\vartheta^2} + \frac{2\ \partial_r\varphi}{r} + \frac{\partial^2_{\vartheta^2}\varphi}{r^2} + \partial^2_{r^2}\varphi$$

$$\left(\frac{\partial_{\vartheta} a_{\vartheta}\ \cos\vartheta}{r^2\ \sin\vartheta} + \frac{\partial^2_{\psi^2} a_{\vartheta}}{r^2\ \sin\vartheta^2} + \frac{2\ \partial_r a_{\vartheta}}{r} + \frac{\partial^2_{\vartheta^2} a_{\vartheta}}{r^2} + \frac{2\ \partial_{\vartheta} a_r}{r^2} + \partial^2_{r^2} a_{\vartheta} - \frac{a_{\vartheta}\ \cos\vartheta^2}{r^2\ \sin\vartheta^2} - \frac{2\ \frac{\partial a_{\psi}}{\partial\psi}\ \cos\vartheta}{r^2\ \sin\vartheta^2} - \frac{a_{\vartheta}}{r^2}\right.$$

$$\left(\frac{\partial_{\vartheta} a_r\ \cos\vartheta}{r^2\ \sin\vartheta} + \frac{\partial^2_{\psi^2} a_r}{r^2\ \sin\vartheta^2} + \frac{2\ \partial_r a_r}{r} + \frac{\partial^2_{\vartheta^2} a_r}{r^2} + \partial^2_{r^2} a_r - \frac{2\ a_{\vartheta}\ \cos\vartheta}{r^2\ \sin\vartheta} - \frac{2\ \frac{\partial a_{\psi}}{\partial\psi}}{r^2\ \sin\vartheta} - \frac{2\ \partial_{\vartheta} a_{\vartheta}}{r^2} - \frac{2\ a_r}{r^2}\right)\ \bar{k}$$

$$\left(\frac{\frac{\partial a_{\psi}}{\partial\vartheta}\ \cos\vartheta}{r^2\ \sin\vartheta} + \frac{2\ \partial_{\psi} a_r}{r^2\ \sin\vartheta} + \frac{2\ \partial_{\psi} a_{\vartheta}\ \cos\vartheta}{r^2\ \sin\vartheta^2} + \frac{\frac{\partial^2 a_{\psi}}{\partial\psi^2}}{r^2\ \sin\vartheta^2} + \frac{2\ \frac{\partial a_{\psi}}{\partial r}}{r} + \frac{\frac{\partial^2 a_{\psi}}{\partial\vartheta^2}}{r^2} + \frac{\partial^2 a_{\psi}}{\partial r^2} - \frac{a_{\psi}\ \cos\vartheta^2}{r^2\ \sin\vartheta^2} - \frac{a_{\psi}}{r^2}\right.$$