Équations macroscopiques de la physique classique

Leçon 1

Introduction aux phénomènes d'advection, de diffusion et de propagation dans le cas 1D

G. Vinsard

Gerard.Vinsard@univ-lorraine.fr

13 septembre 2017

Objectifs de la leçon

- Introduire les phénomènes : d'advection, de diffusion et de propagation ;
- Introduire les conditions aux limites : de Dirichlet, de Neumann et de Robin ;
- Discuter des propriétés des grandeurs subissant ces types d'évolution ;
- Avec le souci de montrer les mécanismes sous-jacent aux phénomènes sans introduire trop de complications.

Structure discrète et continue

- La droite réelle figurant l'espace à 1 dimension est découpée en cases de largeurs δx ; le temps n'est considéré qu'aux instants multiples d'une quantité δt ; les fonctions du temps et de l'espace sont associées à des nombres

$$F_n^p = F\left(p\,\delta t, \left(n+\frac{1}{2}\right)\,\delta x\right)$$

- δx et δt sont supposés petits dans le sens où les variations δF obtenues par des variations δx et δt peuvent s'écrire au 1ier ordre comme

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial t}\,\delta t + \frac{\partial F}{\partial x}\,\delta x = \underbrace{\partial_t F\,\delta t + \partial_x F\,\delta x}_{\text{pour abréger}}$$

- δx et δt sont tels que leur rapport est fini : si L et T sont des longueur et temps *caractéristiques*

$$\begin{cases} \delta x = \delta\lambda\ L \\ \delta t = \delta\lambda\ T \end{cases} \Longrightarrow \frac{\delta x}{\delta t} = \frac{L}{T} \text{ qui est une vitesse}$$

Structure discrète et continue : l'ordre 2

- Ainsi

$$\left\{\begin{array}{l} F_n^{p+1} = F_n^p + \partial_t F\left(p\,\delta t, \left(n+\frac{1}{2}\right)\ \delta x\right)\ \delta t = F_n^p + \partial_t F_n^p\ \delta t \\ F_{n+1}^p = F_n^p + \partial_x F\left(p\,\delta t, \left(n+\frac{1}{2}\right)\ \delta x\right)\ \delta t = F_n^p + \partial_x F_n^p\ \delta x \\ F_{n+1}^{p+1} = F_n^p + \partial_t F_n^p\ \delta t + \partial_x F_n^p\ \delta x \end{array}\right.$$

- Mais s'il s'avère que dans une expression les termes de 1ier ordre sont nuls alors les développements au second ordre sont utilisés ; par exemple on n'écrit pas

$$F_{n+1}^p + F_{n-1}^p = 2\ F_n^p$$

mais

$$F_{n+1}^p + F_{n-1}^p = 2\ F_n^p + \partial_{xx}^2 F_n^p\ \delta x^2$$

où

$$\partial_{xx}^2 F_n^p = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial x}$$

Densité et quantité

- Une quantité est une grandeur additive comme la masse, la quantité de mouvement, l'énergie, la charge électrique ou tout simplement un nombre de particules.

- Cette quantité est répartie dans l'espace ; comme ici l'espace est 1D, cette répartition est définie par une densité $\rho \;:\; \mathbb{R}\times\mathbb{R} \;\longrightarrow\; \mathbb{R}$ telle que la quantité contenue par l'intervalle $[x_1, x_2]$ est

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(t, x)\, dx$$

- La quantité qui se trouve dans la case n à l'instant $p\,\delta t$ est répartie selon la densité ρ

$$q_n^p = \int_0^{\delta x} \rho(p\,\delta t, n\,\delta x + s)\, ds \approx \rho(p\,\delta t, n\,\delta x + \delta x/2)\,\delta x = \rho_n^p\,\delta x$$

L'advection (ou convection ou transport ou conservation)

- Au niveau discret, l'advection est le processus d'évolution en temps pour lequel la totalité de la quantité de la case n au « temps » p se retrouve dans la case $n+1$ au temps $p+1$, soit

$$\delta x\ \rho_{n+1}^{p+1} = \delta x\ \rho_n^p$$

d'où

$$\partial_t \rho_n^p\ \delta t + \partial_x \rho_n^p\ \delta x = 0 \Longrightarrow \partial_t \rho_n^p + \frac{L}{T}\ \partial_x \rho_n^p = 0$$

- Le passage au continu fournit alors l'équation aux dérivées partielles (EDP)

$$\partial_t \rho + v\ \partial_x \rho = 0 \text{ avec } v = \frac{L}{T}$$

qui est l'équation d'advection pour une vitesse v uniforme (i.e. ne dépendant pas de x), indépendante du temps (et positive mais si elle était négative, il suffirait de faire le passage de la case n à la case $n-1$ pour obtenir le même résultat).

Application « flot »

- Le traitement du cas de vitesse non uniforme est facilité par l'introduction de l'application

$$\Psi \quad : \quad \mathbb{R}\times\mathbb{R} \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}$$

qui permet de représenter la position $\Psi(t,x)$ occupée à l'instant t d'une position initialement en x ;

- La connexion entre la vitesse $v(t,x)$ et Ψ (qui est appelée le « flot ») est

$$\Psi(t,x) = X(t) \text{ pour } X \text{ solution de } \frac{dX}{dt} = v(t,X) \text{ et } X(0) = x$$

- d'où la relation

$$\partial_t\Psi(t,x) = v(t,\Psi(t,x))$$

(en effet

$$\frac{dX}{dt} = \partial_t\Psi(t,x) = \frac{dX}{dt} = v(t,X = \Psi(t,x)))$$

Cas d'une vitesse non uniforme et dépendant du temps

- La quantité δq contenue par l'intervalle $[x, x+\delta x[$ à l'instant initial est

$$\delta q = \int_x^{x+\delta x} \rho(0,s)\; ds$$

elle se retrouve dans l'intervalle $[\Psi(t,x), \Psi(t,x+\delta x)[$ à l'instant t, soit

$$\delta q = \int_{\Psi(t,x)}^{\Psi(t,x+\delta x)} \rho(t,s)\; ds$$

- Il « suffit » alors d'écrire que δq ne varie pas dans le temps, soit

$$\frac{d}{dt}\int_{\Psi(t,x)}^{\Psi(t,x+\delta x)} \rho(t,s)\; ds = 0$$

pour obtenir (après avoir fait un développement de Taylor en δx)

$$\partial_t \rho + \partial_x (v\;\rho) = 0$$

qui est l'équation d'advection (ou conservation ou convection ou transport) générale.

Démonstration : (lorsque pas d'arguments, ceux-ci sont $(t, \Psi(t, x))$

$$I = \int_{\Psi(t,x)}^{\Psi(t,x+\delta x)} \rho(t, s)\, ds \approx \rho(t, \Psi(t, x))\, \partial_x \Psi(t, x)\, \delta x$$

$$\frac{d}{dt}\left(\rho(t, \Psi(t, x))\, \partial_x \Psi(t, x) \right) = \left(\partial_t \rho + \partial_x \rho\, \partial_t \Psi\right)\, \partial_x \Psi + \rho\, \partial^2_{tx} \Psi$$

et

$$\partial_t \Psi(t, x) = v(t, \Psi(t, x)) \rightarrow \partial^2_{xt} \Psi = \partial_x v(t, \Psi(t, x))\, \partial_x \Psi(t, x)$$

d'où

$$\frac{dI}{dt} = 0 \rightarrow \left(\partial_t \rho + \partial_x \rho\, v + \rho\, \partial_x v\right)\, \partial_x \Psi\, \delta x = 0$$

soit

$$\partial_t \rho + \partial_x (\rho\, v) = 0$$

Le flux advectif (ou convectif)

- Si la densité est solution de l'équation d'advection

$$\partial_t \rho + \partial_x (v \ \rho) = 0$$

alors entre deux bornes x_0 et x_1 quelconques

$$\frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x_1} \rho(t,s) \ ds = -\rho(t,x_1) \ v(t,x_1) + \rho(t,x_0) \ v(t,x_0)$$

- La quantité contenue dans l'intervalle $[x_0, x_1]$ est $Q = \int_{x_0}^{x_1} \rho(t,s) \ ds$ et on appelle flux advectif à la position x la quantité

$$\Phi(t,x) = \rho(t,x) \ v(t,x)$$

L'équation d'advection est donc la version différentielle de l'affirmation que la variation temporelle de quantité entre deux bornes est égale à l'opposé de la différence entre les flux à ces deux bornes

$$\frac{dQ}{dt} = -\Phi(t,x_1) + \Phi(t,x_0)$$

La diffusion

- Au niveau discret, la diffusion est le processus d'évolution en temps pour lequel une fraction α de la quantité de la case n se retrouve pour moitié dans les cases $n+1$ et $n-1$ (et vice versa) au temps $p+1$, soit

$$\rho_n^{p+1} = (1-\alpha)\,\rho_n^p + \frac{\alpha}{2}\left(\rho_{n+1}^p + \rho_{n-1}^p\right)$$

Selon la règle précédement énoncée, le développement de cette expression introduit un terme à l'ordre 2, soit

$$\partial_t \rho_n^p\,\delta t = \frac{\alpha\,\delta x^2}{2}\,\partial_{xx}^2 \rho_n^p$$

- Le passage au continu fournit alors l'équation de diffusion

$$\partial_t \rho = D\,\partial_{xx}^2 \rho \;\text{ avec } D = \frac{\alpha\,\delta x^2}{2\,\delta t}$$

La diffusivité

► Le coefficient $D = \frac{\alpha\, \delta x^2}{2\, \delta t}$ s'appelle la diffusivité ; puisque $\delta x/\delta t = L/T$, c'est une quantité finie non nulle seulement si α dépend de δx de manière que $\alpha\, \delta x$ soit une quantité finie non nulle.

► Ce qui est le cas : pour le voir il suffit de grouper 2 cases successives, soit

$$\begin{aligned}\left(\rho_n^{p+1} + \rho_{n+1}^{p+1}\right) &= (1-\alpha)\,\left(\rho_n^p + \rho_{n+1}^p\right) + \frac{\alpha}{2}\left(\rho_{n+1}^p + \rho_{n-1}^p + \rho_{n+2}^p + \rho_n^p\right) \\ &= \left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\,\left(\rho_n^p + \rho_{n+1}^p\right) + \frac{\alpha}{2}\left(\rho_{n-1}^p + \rho_{n+2}^p\right)\end{aligned}$$

et comme $\rho_{n-2}^p = \rho_{n-1}^p - \partial_x \rho_{n-1}^p\, \delta x$; $\rho_{n+2}^p = \rho_{n+1}^p + \partial_x \rho_{n+1}^p\, \delta x$ il vient

$$\begin{aligned}\left(\rho_n^{p+1} + \rho_{n+1}^{p+1}\right) &= \left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\,\left(\rho_n^p + \rho_{n+1}^p\right) + \frac{\alpha}{4}\left(\left(\rho_{n-2}^p + \rho_{n-1}^p\right) + \left(\rho_{n+2}^p + \rho_{n+3}^p\right)\right) \\ &+ \left(\partial_x \rho_{n+1}^p - \partial_x \rho_{n-1}^p\right) \frac{\alpha\, \delta x}{4} \rightarrow \text{terme négligeable}\end{aligned}$$

C'est la formule où 2 cases sont groupées pour devenir une seule case d'étendue $2\,\delta x$; et c'est aussi c'est d'une seule case d'étendue δx avec un coefficient α divisé par 2 : d'où la conclusion que $\delta x\, \alpha$ est une quantité finie non nulle.

Flux conductif

- Le modèle présenté pour introduire l'équation de diffusion souffre de l'inconvénient qu'il ne se s'étend pas facilement au cas où la diffusivité serait non uniforme, soit $\begin{array}{rcl} D : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & D(x) \end{array}$

- Aussi va-t-on procéder de manière autoritaire : le flux conductif est par définition

$$\Phi(t,x) = -D(x)\,\partial_x \rho(t,x)$$

et, toujours par définition, l'équation de diffusion traduit que la variation temporelle de la quantité contenue dans l'intervalle $[x_0, x_1]$

$$Q = \int_{x_0}^{x_1} \rho(t,s)\,ds$$

est égale à l'opposé de la différence entre les flux à ces deux bornes, soit

$$\frac{dQ}{dt} = -\Phi(t,x_1) + \Phi(t,x_0)$$

Équation de diffusion

- En choisissant $x_0 = x$, $x_1 = x + \delta x$

$$\frac{d}{dt}\int_x^{x+\delta x} \rho(t,s)\, ds = D(x+\delta x)\, \partial_x \rho(t, x+\delta x) - D(x)\, \partial_x \rho(t,x)$$

un développement de Taylor par rapport à δx conduit alors à

$$\partial_t \rho = \partial_x \left(D\, \partial_x \rho\right)$$

où D est intérieur à une des dérivations par rapport à x.

- C'est équation de diffusion avec diffusivité D (éventuellement) non uniforme qui donc exprime que la variation temporelle d'une quantité dans un intervalle quelconque s'équilibre avec l'apport des flux conductifs

$$\Phi(t,x) = -D(x)\, \partial_x \rho(t,x)$$

à ses bornes.

La propagation : inertie des cloisons

- Cette fois les quantités ne sont pas transférées d'une case à l'autre mais les cloisons des cases peuvent se déplacer et elles sont supposées être remplie d'une même quantité de gaz parfait.

- À l'équilibre, les cloisons sont aux positions $n\,\delta x$ et la position des cloisons au cours du temps est paramétrée par leurs déplacements $\delta x\; u_n$ par rapport aux positions d'équilibre.

- Pour simplifier, la masse du gaz est supposée négligeable et la masse des cloisons est δm, les forces d'inerties sont alors : pour la cloison n

$$-\delta m\,\delta x\;\ddot{u}_n$$

où $\ddot{u}_n$ est la dérivée temporelle seconde du déplacement u_n.

- δW est l'énergie du gaz contenu dans une case de dimension $\delta x \times S$ où S est la surface des cloisons.

La propagation : forces sur les cloisons

- Pour simplifier, le gaz parfait est supposé rester à température constante et donc la pression dans la case comprise entre les positions $n\,\delta x + \delta x\; u_n$ et $(n+1)\,\delta x + \delta x\; u_{n+1}$ est

$$P_n = \frac{\delta W}{S\;\delta x\,(1 + u_{n+1} - u_n)}$$

la force qu'exerce cette case sur la cloison n est

$$-P_n\; S = -\frac{\delta W}{\delta x\,(1 + u_{n+1} - u_n)}$$

la case entre les cloisons $n-1$ et n exerce sur la cloison n la force

$$P_{n-1}\; S = \frac{\delta W}{\delta x\,(1 + u_n - u_{n-1})}$$

et donc la force complète sur la cloison n est

$$\delta F_n = \frac{\delta W}{\delta x\,(1 + u_n - u_{n-1})} - \frac{\delta W}{\delta x\,(1 + u_{n+1} - u_n)}$$

La propagation : approximation des forces sur les cloisons

- Les déplacements sont supposés petits devant la dimension des cloisons et donc les nombres u_n sont petits devant l'unité, la force s'exerçant sur la cloison n devient alors

$$\delta F_n = \frac{\delta W}{\delta x} \left(u_{n-1} + u_{n+1} - 2\, u_n\right)$$

- La relation fondamentale de la dynamique sur chaque cloison n

$$\delta F_n - \delta x\, \delta m\, \ddot{u}_n = 0$$

conduit alors à

$$\ddot{u}_n = \frac{\delta W}{\delta m} \frac{u_{n-1} + u_{n+1} - 2\, u_n}{\delta x^2}$$

soit donc en considérant que $u_n = u(n\,\delta x)$ pour une fonction $u \;:\; \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et après passage à la limite $\delta x \longrightarrow 0$

$$\partial^2_{tt} u - c^2\, \partial^2_{xx} u = 0 \text{ avec } c^2 = \frac{\delta W}{\delta m}$$

La vitesse de propagation

- L'équation de propagation est

$$\partial^2_{tt} u - c^2 \, \partial^2_{xx} u = 0$$

où c est la vitesse de propagation.

- c dont l'expression est ici $c = \sqrt{\dfrac{\delta W}{\delta m}}$ peut être un nombre fini non nul puisque δW (l'énergie du gaz contenu dans une case de dimension $\delta x \times S$) et δm (la masse d'une cloison de dimension inférieure à $\delta x \times S$ mais de densité bien supérieure à celle d'un gaz) sont proportionnels à δx

- Et la vitesse de propagation peut dépendre de x si l'énergie du gaz contenu dans les cases ou la masse des cloisons varie ; comme l'équation porte sur la position relative $u_n \delta x$ des cloisons, on peut considérer que leurs dérivées temporelles sont continues et donc l'équation de propagation n'a pas à être modifiée comme l'ont été celles d'advection et de diffusion.

Masses et ressorts

- L'équation de propagation a été introduite de manière à garder une certaine continuité avec l'introduction des équations d'advection et de diffusion ;

- Mais l'examen des éléments qui la constituent montre qu'elle contient essentiellement une sorte de compétition entre énergie cinétique et énergie potentielle ; de fait la considération d'une chaine de ressorts de raideur $E/\delta x$ reliant des masses $\rho\,\delta x$ aux positions $(n + u_n)\,\delta x$ permet d'obtenir
$$\rho\,\delta x\,\ddot{u}_n = \frac{E}{\delta x}(u_{n+1} + u_{n-1} - 2\,u_n)$$

- Soit donc, pour $u_n = u(t, n\,\delta x)$ et après passage à la limite $\delta x \longrightarrow 0$
$$\partial_{tt} u - c^2\,\partial_{xx} u = 0 \;\text{ avec } c = \frac{E}{\rho}$$
soit une équation de propagation portant sur les déplacements des masses par rapport à leur position d'équilibre $(u = 0)$.

Advection, Diffusion et propagation

- Des manipulations sur des systèmes simples ont conduit à trois formes de lois d'évolution pour des densités ρ et positions u qui sont :

- L'advection (il y a transfert de quantités)

$$\partial_t \rho + \partial_x (v\ \rho) = 0 \text{ avec } v \text{ la vitesse de transport}$$

- La diffusion (il y a transfert de quantités)

$$\partial_t \rho = \partial_x (D\ \partial_x \rho) \ \text{ avec } D \text{ la diffusivité}$$

- La propagation à c constant (il n'y a pas de transfert de quantités)

$$\partial^2_{tt} u - c^2\ \partial^2_{xx} u = 0 \ \text{ avec } D \text{ la vitesse de propagation}$$

- Comprendre ces lois, c'est connaître les propriétés des solutions des équations qui les décrivent.

Propriétés de l'équation d'advection dans le cas d'une vitesse uniforme et en domaine infini

- Le domaine est infini lorsque l'équation porte sur toutes les positions

$$-\infty < x < \infty$$

- Une condition initiale est la donnée de la fonction partielle en espace de ρ ou u à un instant donné, si cet instant est $t = 0$

$$\rho(t = 0, x) = \rho_0(x) \text{ ou } u(t = 0, x) = u_0(x)$$

où donc ρ_0 et u_0 sont des données.

- La solution de l'équation d'advection est alors parfaitement déterminée

$$\rho(t, x) = \rho_0(x - v\ t)$$

c'est la condition initiale translatée de $v\ t$.

Solution formelle pour une vitesse quelconque

- Si l'application flot définie précédemment telle que

$$\partial_t \Psi(t,x) = v(t, \Psi(t,x))$$

est connue alors

$$\rho(t, \Psi(t,x)) \, |\partial_x \Psi(t,x)| = \rho_0(x)$$

ou encore (si $\Psi(t, \Psi^{-1}(t,x)) = x$)

$$\rho(t,X) = \frac{\rho_0\left(\Psi^{-1}(t,X)\right)}{|\partial_x \Psi(t, \Psi^{-1}(t,X))|}$$

- Cette expression n'est pas nécessairement intéressante à utiliser directement, mais elle permet *a minima* de connaitre le taux de variation de la densité en fonction du temps : la densité de la quantité situé initialement au voisinage de x

Propriétés de l'équation de diffusion en domaine infini

- Toujours en domaine infini, la solution de l'équation de diffusion

$$\partial_t \rho = D\ \partial^2_{xx} \rho \ \text{ avec } \rho(t=0,x) = \rho_0(x)$$

est également déterminée mais c'est au prix d'un calcul (par exemple en utilisant une transformation de Fourier en temps).

- Il existe une forme de condition initiale qui permet d'expliciter simplement une solution, c'est la gaussienne

$$\rho_0 = \frac{Q\ \exp^{\frac{-(x-x0)^2}{4\ D\ t_0}}}{\sqrt{4\pi\ D\ t_0}} \Longrightarrow \rho = \frac{Q\ \exp^{\frac{-(x-x0)^2}{4\ D\ (t+t_0)}}}{\sqrt{4\pi\ D\ (t+t_0)}}$$

la solution est alors la même gaussienne où le paramètre t_0 est augmenté de t.

(Cette forme gaussienne est paramétrée en espace par x_0 et elle peut servir de base de Fourier pour construire explicitement des solution du problème pour ρ_0 quelconque mais c'est au prix d'un calcul)

Propriétés de l'équation de diffusion en domaine infini

- La quantité totale Q se conserve

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho \, dx = Q$$

et c'est une propriété qui demeure vraie même dans le cas où ρ_0 est quelconque, en effet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\partial_t \rho - D \, \partial^2_{xx} \rho\right) \, dx = 0 \text{ d'où } \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \rho \, dx = D \; [\partial_x \rho]_{-\infty}^{\infty} = 0$$

- Si on reprend la solution gaussienne, on constate qu'elle s'étale lorsque t croît. La diffusion a pour effet de lisser une distribution de quantité quelconque.

- c'est cohérent avec le processus qui a été pris comme point de départ pour génèrer l'équation de diffusion.

Propriétés de l'équation de propagation en domaine infini

- Encore en domaine infini, la solution de l'équation de propagation

$$\partial_{tt}^2 u - c^2\ \partial_{xx}^2 u = 0 \ \text{ avec } u(t=0,x) = u_0(x)$$

n'est pas complément déterminée. Il y a déjà les solutions

$$u(t,x) = u_0(x - c\ t) \text{ et } u(t,x) = u_0(x + c\ t)$$

ainsi que leurs combinaisons linéaires

$$u(t,x) = \lambda\ u_0(x - c\ t) + (1-\lambda)\ u_0(x + c\ t)$$

- Il est donc nécessaire de fournir une seconde condition initiale qui peut porter sur la dérivée temporelle de u, soit

$$\partial_t u(t=0,x) = \dot{u}_0(x)$$

où $\dot{u}_0 \ : \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une donnée au même titre que u_0.

Propriétés de l'équation de propagation

- Si $\dot{u}_0 = \mu \; c \; \frac{du_0}{dx}$, la solution est alors (obtenue par inspection)

$$\frac{1-\mu}{2} \; u_0(x - c \; t) + \frac{1+\mu}{2} \; u_0(x + c \; t)$$

et donc

  - pour $\mu = 0$ la condition initiale u_0 évolue comme somme de deux composantes : l'une étant la demi fonction u_0 translatée de $c \; t$ et l'autre la demi fonction u_0 translatée de $-c \; t$;
  - pour $\mu = -1$ elle évolue comme elle-même translatée de ct ;
  - ...

- Mais si $\dot{u}_0$ n'est pas de la forme $\mu \; c \; \frac{du_0}{dx}$ les choses sont plus compliquées. Il y a lieu de faire un calcul (par exemple par transformée de Laplace) pour obtenir la solution.

Conditions aux limites pour l'équation de diffusion

- L'équation de diffusion

$$D\ \partial_{xx}\rho - \partial_t\rho = 0$$

est généralement utilisée dans un domaine spatial $0 < x < L$; ρ est connue à l'instant initial

$$\rho(t = 0, x) = \rho_0(x)$$

et on cherche ρ aux instants ultérieurs.

- Tel que posé, le problème n'est pas complet : l'équation n'est pas valable en $x = 0$ et $x = L$ et il faut lui en substituer d'autres qui s'appellent des conditions aux limites.

- Ces conditions sont déterminées par la définition du problème pratique qui demande la résolution de l'équation de diffusion ; cependant elles se trouvent souvent correspondre à des conditions particulières standards qu'il est utile de connaître.

Dirichlet, Neumann, Robin

- Une condition de Dirichlet en $x = 0$ s'écrit

$$\rho(t, x = 0) = \rho_s$$

Elle traduit le fait que ρ prend une valeur prescrite à cette limite ; par exemple on met en contact un morceau de sel [1] est avec de l'eau pure en $x = 0$ et ρ est la concentration massique du sel qu'on considère valoir la concentration maximale possible (saturation à $\rho_s = 360 g/l$ à $20\ ^o C$) en $x = 0$.

- Une condition de Neumann homogène en $x = L$ s'écrit

$$\partial_x \rho(t, x = L) = 0$$

L'eau de l'exemple est en contact en $x = L$ avec une paroi en verre à travers laquelle le sel ne passe pas et donc le flux de sel est nul.

1. En fait le sel se décompose en deux ions qui ont des des diffusivités différentes mais l'interaction électrique entre les ions fait que leurs concentrations respective en un point est identique (électroneutralité) et donc il y a une diffisivité globale

Dirichlet, Neumann, Robin

- Une condition de Neumann en $x = 0$ s'écrit

$$-D\,\partial_x \rho(t, x = 0) = \phi_s$$

On revient sur la condition de Dirichlet dans l'exemple en introduisant la cinétique de dissolution du sel : ϕ_s est la masse de sel qui se dissous par seconde et par m^2 de paroi dans de l'eau. Le signe ≪ - ≫ est cohérent avec la définition du flux conductif.

- Une condition de Robin en $x = 0$ s'écrit

$$-D\,\partial_x \rho(t, x = 0) = \alpha\,(\rho(t, x = 0) - \rho_s)$$

On revient sur la condition de Neumann de l'exemple en faisant dépendre linéairement ϕ_s de la différence entre concentration actuelle au contact $\rho(t, x = 0)$ et concentration à saturation ρ_s.

Conditions aux limites pour l'équation de propagation

- L'équation de propagation

$$\partial_{tt} u - c^2 \, \partial_{xx} u = 0$$

porte sur un déplacement u (ou une grandeur qui s'y ramène). Comme pour l'équation de diffusion, elle est généralement utilisée dans un domaine spatial $0 < x < L$; u et sa dérivée temporelle sont connus à l'instant initial

$$u(t=0,x) = u_0(x) \;\text{ et }\; \partial_t u(t=0,x) = \dot{u}_0(x)$$

et le problème ainsi posé n'est pas complet : il manque encore des conditions aux limites en $x = 0$ et $x = L$.

- Ces conditions peuvent être de type Dirichlet, Neuman (homogène ou non) ou Robin.

Dirichlet, Neumann et Robin

- En complément avec les dénotations utilisées pour introduire l'équation de propagation, une corde vibrante de longueur L, est considérée ; u est le déplacement latéral de la corde, c'est à dire un déplacement transversal plutôt que longitudinal.
- La corde est attaché en $x = 0$ à un bras de levier qui lui impose un déplacement $u_0(t)$, la condition correspondante est de Dirichlet

$$u(t, x = 0) = u_0(t)$$

- Si l'extrémité en $x = L$ est laissée libre, le déplacement $u(t, x = L)$ n'est pas connu mais, en revenant à la description en terme de masses connectés par des ressorts (même si le déplacement est transversal), il est clair que la dernière masse $(n = N)$ n'est pas contrainte par deux ressorts. L'équation qui porte sur elle est donc

$$\delta x \; \rho \; \ddot{u}_N = \frac{E}{\delta x} \left(u_{N-1} - u_N \right) \quad \underset{\delta x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} \quad \partial_x u(t, x = L) = 0$$

c'est une condition de Neumann homogène.

Dirichlet, Neumann et Robin

- Si maintenant l'extrémité $x = L$ est soumise à une force de frottement visqueux $-\kappa\,(u_N)$, l'équation devient

$$\delta x\ \rho\ \ddot{u}_N = \frac{E}{\delta x}\,(u_{N-1} - u_N) - \kappa\ u_N$$

d'où, après passage à la limite

$$\partial_x u(t, x = L) = \frac{\kappa}{E}\ u(t, x = L)$$

c'est une condition de Robin.

- Et il est possible de trouver une condition de Neumann en introduisant une force prescrite f à la place de la force de frottement visqueux.

Exercices : Advection

- En domaine infini, on donne une vitesse

$$v(t, x) = v_0 \, (2 + \sin \omega \, t)$$

chercher la solution de

$$\partial_t \rho + \partial_x \, (v \, \rho) = 0 \;\; \text{avec} \; \rho(t = 0, x) = \rho_0(x)$$

en utilisant l'application flot.

- On donne l'application flot

$$\psi(t, x) = x \; \exp^{-t^2/(2 \, T^2)}$$

trouver l'équation d'advection à laquelle elle correspond.

Exercice : Diffusion

- Chercher les solutions de

$$\text{pour } x > 0 \ : \ D\, \partial_{xx}\rho - \partial_t \rho = 0 \ ; \ \rho(t=0,x) = 0$$

qui sont de la forme

$$\rho(t,x) = F\left(\frac{x}{2\sqrt{D\ t}}\right) \quad \text{avec} \quad F \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longrightarrow & F(u) \end{array} \quad \text{à déterminer}$$

- En supposant que la diffusivité du sel dans l'eau est $D = 10^{-9}\ m^2/s$ et que la concentration massique en $x = 0$ est de 360 g/l, combien de temps faudrait-il pour atteindre une concentration de 30 g/l (eau de mer) à $x = 10cm$?

- L'eau est dans un domaine $0 < x < L$ qui est limité en L par une paroi.
Si la paroi ne laisse pas passer le sel, que devient la concentration dans l'eau au bout d'un temps infini ?
Même question si elle laisse passer le sel avec un flux de la forme $\Phi_L = \alpha\ \rho(t, L)$.

Exercice : Propagation

- Construire la solution de

$$\begin{aligned} &\text{Pour } 0 < x < L \ : \ \partial_{tt} u - c^2 \, \partial_{xx} u = 0 \\ &u(t=0,x) = 0 \ ; \ \partial_t u(t=0,x) = 0 \\ &u(t,x=0) = u_0(t) \text{ avec } t < 0 \Longrightarrow u_0(t) = 0 \end{aligned}$$

dans les cas suivants

1. $u(t, x = L) = 0$
2. $\partial_x u(t, x = L) = 0$
3. $c \, \partial_x u(t, x = L) = -\partial_t u(t, x = L)$

- Interpréter ces trois cas dans le cas où le problème est celui d'une ligne électrique dans laquelle le courant $i(t,x)$ et la tension $u(t,x)$ sont liés par

$$\partial_t u = -l \partial_t i \ ; \ \partial_x i = -\kappa \, \partial_t u$$

l et κ étant l'inductance et la capacité par unité de longueur.