

Drone quadricoptère



Une analyse de son vol et de ses éléments



G. Vinsard

Gerard.Vinsard@univ-lorraine.fr

1^{er} août 2018

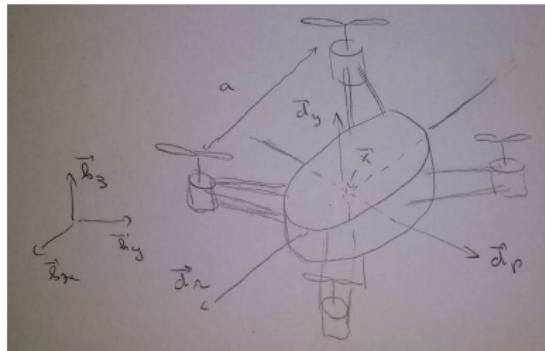


Objectifs de la leçon

- *Équations Macroscopiques de la Physique Classique* a peu de chance de plaire d'emblée au public auquel il s'adresse.
- L'analyse du vol d'un drone quadricoptère semble, par contre, plus directement séduisante.
- La 1^o leçon de l'enseignement traite donc de ce thème avec l'intention de montrer que des connaissances de physique macroscopique sont quand même bien utiles.

Attention, l'auteur de cette présentation n'est pas un spécialiste de l'aérodynamique. Il est donc possible que certaines affirmations faites dans les approximations ne soient pas correctes ou tout du moins sous-optimales.

Schématisation



- La géométrie du drone est une sorte de parallélépipède sur lequel sont attachés 4 moteurs pourvus d'une hélice (les propulseurs) ; les 4 moteurs forment un carré de côté a dont le centre est (c'est à vérifier) le centre de gravité du drone \vec{X} ;
- le repère du drone est $(\vec{X}, \vec{d}_r, \vec{d}_p, \vec{d}_y)$, où $(\vec{d}_r, \vec{d}_p, \vec{d}_y)$ sont des vecteurs d'une base orthonormée ;
- Les vecteurs $\vec{d}_r, \vec{d}_p, \vec{d}_y$ sont nommés ainsi parce qu'ils sont les axes de : roulis (roll), tangage (pitch), lacet (yaw). (On suppose que le mouvement « normal » du drone est une translation en \vec{d}_r)

1^o partie : le mouvement du drone en l'absence de dissipation

- ▶ L'objectif de cette partie est d'exprimer les équations du mouvement du drone sans prendre en compte la dissipation.
- ▶ Pour cela on admet que les hélices génèrent des forces et des couples et, bien que ce ne soit possible qu'en présence de l'air environnant, que cet air environnant est absent par ailleurs.
- ▶ L'intérêt est de produire un système dynamique qui pourra être ultérieurement amendé par l'introduction de cette dissipation.
- ▶ Pour des raisons liées au fait qu'on renoncera à utiliser des variables angulaires dans les rotations du drone, on n'utilise pas l'approche lagrangienne du problème (qui comporte beaucoup de contraintes, de type liaisons holonomes).

Forces produites par les propulseurs

- Les axes des moteurs sont dirigés suivant \vec{d}_y et, dans le repère $(\vec{X}, \vec{d}_r, \vec{d}_p, \vec{d}_y)$ passent par les positions ('f', 'b', 'r', 'l' pour front, back, left, right)

$$\vec{X}_{fl} = a \frac{\vec{d}_r + \vec{d}_p}{2} ; \vec{X}_{fr} = a \frac{\vec{d}_r - \vec{d}_p}{2} ; \vec{X}_{bl} = -\vec{X}_{fr} ; \vec{X}_{br} = -\vec{X}_{fl}$$

- Les hélices génèrent des poussées (thrusts)

$$\vec{f}_{fl} = f_{fl} \vec{d}_y ; \vec{f}_{fr} = f_{fr} \vec{d}_y ; \vec{f}_{bl} = f_{bl} \vec{d}_y ; \vec{f}_{br} = f_{br} \vec{d}_y$$

dont les points d'applications sont aux points de fixation des hélices sur les axes, soit aux positions précédentes augmentées de $d_h \vec{d}_y$ (ce décalage n'aura aucune importance).

- La force totale qui s'exerce sur le centre de masse \vec{X} est alors

$$\vec{F} = (f_{fl} + f_{fr} + f_{bl} + f_{br}) \vec{d}_y$$

Couples produits par les propulseurs

- Les forces précédentes génèrent également des couples (torques)

$$\vec{C}_{fl} = \vec{X}_{fl} \times \vec{f}_{fl} ; \quad \vec{C}_{fr} = \vec{X}_{fr} \times \vec{f}_{fr} ; \quad \vec{C}_{bl} = \vec{X}_{bl} \times \vec{f}_{bl} ; \quad \vec{C}_{br} = \vec{X}_{br} \times \vec{f}_{br}$$

soit

$$\vec{C}_{fl} = f_{fl} \vec{X}_{fr} ; \quad \vec{C}_{fr} = -f_{fr} \vec{X}_{fl} ; \quad \vec{C}_{bl} = f_{bl} \vec{X}_{fl} ; \quad \vec{C}_{br} = -f_{br} \vec{X}_{fr}$$

- Mais les hélices produisent également des couples

$$\vec{c}_{fl} = c_{fl} \vec{d}_y ; \quad \vec{c}_{fr} = c_{fr} \vec{d}_y ; \quad \vec{c}_{bl} = c_{bl} \vec{d}_y ; \quad \vec{c}_{br} = c_{br} \vec{d}_y$$

dont les valeurs $c_{fl}, c_{fr}, c_{bl}, c_{br}$ ne sont pas indépendantes des valeurs $f_{fl}, f_{fr}, f_{bl}, f_{br}$ des forces mais qui s'ajoutent aux précédents couples.

- Le couple total est alors

$$\begin{aligned}\vec{C} &= \vec{c}_{fl} + \vec{c}_{fr} + \vec{c}_{bl} + \vec{c}_{br} + \vec{C}_{fl} + \vec{C}_{fr} + \vec{C}_{bl} + \vec{C}_{br} \\ &= (c_{fl} + c_{fr} + c_{bl} + c_{br}) \vec{d}_y + (f_{bl} - f_{fr}) \vec{X}_{fl} + (f_{fl} - f_{br}) \vec{X}_{fr}\end{aligned}$$

Relation entre les forces et les couples propulseurs

- Le moteur est entraîné par un couple moteur c_m qui s'équilibre à une certaine vitesse Ω avec le couple résistant c de l'hélice, lequel provenant d'effets aérodynamiques assez complexes (cf. leçon ultérieure). Et ces effets produisent une poussée f sur l'hélice.
- Sans même avoir étudié ces effets, il est possible d'affirmer que f et c sont des variables dépendantes de Ω et comme telles sont également des variables dépendantes l'une de l'autre.
- Les variables à considérer sont donc les vitesses angulaires $\Omega_{fl}, \Omega_{fr}, \Omega_{bl}, \Omega_{br}$ des 4 moteurs à partir desquels un modèle de mécanique permet de déduire les valeurs des $f_{fl}, f_{fr}, f_{bl}, f_{br}$ et des $c_{fl}, c_{fr}, c_{bl}, c_{br}$

Approche pragmatique de la relation

- ▶ Les moteurs de drone sont de deux types : C (pour clock) et A (pour anti-clock) ; les moteurs C sont placés en *fl* et *br*, les A en *fr* et *bl*.
- ▶ De plus les hélices *fl* et *fr* sont identiques, de même que *fr* et *bl*. Mais *fl* et *bl* sont chirales l'une de l'autre.



- ▶ Ces constatations portent à penser que lors du vol d'un drone qui me tombe pas toutes les forces f_{fl} , f_{fr} , f_{bl} , f_{br} sont positives alors que, si les c_{fl} et c_{br} sont positives, les c_{fr} et c_{bl} sont négatives ou vice-versa.

Vol stationnaire

Les forces et couples générés par les propulseurs étant

$$\vec{F} = (f_{fl} + f_{fr} + f_{bl} + f_{br}) \vec{d}_y$$

$$\vec{C} = (c_{fl} + c_{fr} + c_{bl} + c_{br}) \vec{d}_y + (f_{bl} - f_{fr}) \vec{X}_{fl} + (f_{fl} - f_{br}) \vec{X}_{fr}$$

on voit que si la seule autre force est la force de gravité $-m g \vec{k}_z$ le vol stationnaire est possible pour

$$\vec{d}_y = \vec{k}_z ; f_{fl} + f_{fr} + f_{bl} + f_{br} = m g ; c_{fl} + c_{fr} + c_{bl} + c_{br} = 0$$

$$f_{bl} = f_{fr} ; f_{fl} = f_{br}$$

Ce qui suppose que les moteurs tournent tous à la même vitesse en valeur absolue (mais en sens inverse entre *fr*, *bl* d'une part et *fl*, *br* d'autre part). Ainsi

$$f_{fl} = f_{fr} = f_{bl} = f_{br} = \frac{m g}{4} ; c_{fl} = c_{br} = -c_{bl} = -c_{fr}$$

Vecteur instantané de rotation

- Formellement le vecteur instantané de rotation est (membre de droite en notation matricielle)

$$\vec{\Omega} = \omega_r \vec{d}_r + \omega_p \vec{d}_p + \omega_y \vec{d}_y = \begin{pmatrix} \vec{d}_r & \vec{d}_p & \vec{d}_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_r \\ \omega_r \\ \omega_y \end{pmatrix}$$

où les $\omega_r, \omega_p, \omega_y$ sont des variables dépendant du temps à calculer.

- Ce vecteur $\vec{\Omega}$ permet d'exprimer la variation temporelle des $\vec{d}_r, \vec{d}_p, \vec{d}_y$ comme

$$\dot{\vec{d}}_r = \vec{\Omega} \times \vec{d}_r ; \quad \dot{\vec{d}}_p = \vec{\Omega} \times \vec{d}_p ; \quad \dot{\vec{d}}_y = \vec{\Omega} \times \vec{d}_y$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} \dot{\vec{d}}_r \\ \dot{\vec{d}}_p \\ \dot{\vec{d}}_y \end{pmatrix} = \underline{\underline{\Omega}} \begin{pmatrix} \vec{d}_r \\ \vec{d}_p \\ \vec{d}_y \end{pmatrix} \quad \text{avec } \underline{\underline{\Omega}} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_y & -\omega_p \\ -\omega_y & 0 & \omega_r \\ \omega_p & -\omega_r & 0 \end{pmatrix}$$

Théorème du moment cinétique

- Le moment cinétique associé au vecteur de rotation est

$$\vec{J} = \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{d}_r & \vec{d}_p & \vec{d}_y \end{pmatrix}}_{= {}^t \underline{\vec{d}}} \underline{\underline{\mathcal{I}}} \begin{pmatrix} \omega_r \\ \omega_r \\ \omega_y \end{pmatrix} \text{ avec } \underline{\underline{\mathcal{I}}} = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_{rr} & \mathcal{I}_{rp} & \mathcal{I}_{ry} \\ \mathcal{I}_{rp} & \mathcal{I}_{pp} & \mathcal{I}_{py} \\ \mathcal{I}_{ry} & \mathcal{I}_{py} & \mathcal{I}_{yy} \end{pmatrix}$$

où $\underline{\underline{\mathcal{I}}}$ est la matrice d'inertie dans les axes du repère $(\vec{X}, \vec{d}_r, \vec{d}_p, \vec{d}_y)$. Elle n'est diagonale que si ces axes sont aussi les axes d'inertie, ce qui n'est pas nécessairement le cas.

- La variation temporelle du moment cinétique s'équilibre avec les couples appliqués, soit, en utilisant la notation matricielle,

$${}^t \underline{\vec{d}} \left({}^t \underline{\underline{\mathcal{Q}}} \underline{\underline{\mathcal{I}}} \begin{pmatrix} \omega_r \\ \omega_r \\ \omega_y \end{pmatrix} + \underline{\underline{\mathcal{I}}} \begin{pmatrix} \dot{\omega}_r \\ \dot{\omega}_r \\ \dot{\omega}_y \end{pmatrix} \right) = {}^t \underline{\vec{d}} \begin{pmatrix} \frac{a}{2} (f_{fl} + f_{bl} - f_{fr} - f_{br}) \\ \frac{a}{2} (f_{fl} + f_{fr} - f_{br} - f_{bl}) \\ c_{fl} + c_{fr} + c_{bl} + c_{br} \end{pmatrix}$$

Le système dynamique du vecteur de rotation

- On obtient donc (${}^t\underline{\underline{\Omega}} = -\underline{\underline{\Omega}}$)

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega}_r \\ \dot{\omega}_r \\ \dot{\omega}_y \end{pmatrix} = \underline{\underline{\mathcal{I}}}^{-1} \begin{pmatrix} \underline{\underline{\Omega}} \underline{\underline{\mathcal{I}}} \begin{pmatrix} \omega_r \\ \omega_r \\ \omega_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{a}{2}(f_{fl} + f_{bl} - f_{fr} - f_{br}) \\ \frac{a}{2}(f_{fl} + f_{fr} - f_{br} - f_{bl}) \\ c_{fl} + c_{fr} + c_{bl} + c_{br} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

qui est le système dynamique des composantes dans la base $(\vec{d}_r, \vec{d}_p, \vec{d}_y)$ du vecteur instantané $\vec{\Omega}$.

- Comme les couples dus aux propulseurs sont liés au repère $(\vec{X}, \vec{d}_r, \vec{d}_p, \vec{d}_y)$ il est naturel que ce système puisse s'exprimer sans avoir à indiquer les relations entre les bases $(\vec{d}_r, \vec{d}_p, \vec{d}_y)$ et $(\vec{k}_x, \vec{k}_y, \vec{k}_z)$
- Bien évidemment cette situation favorable pourrait se détériorer si une analyse plus poussée du drone introduisait des couples supplémentaires qui seraient eux liés au repère $(\vec{k}_x, \vec{k}_y, \vec{k}_z)$, comme par exemple une dissipation visqueuse avec de l'air en mouvement.

Cas symétrique du système dynamique du vecteur de rotation

► Les équations du système dynamique du vecteur de rotation ne sont rien d'autre que les formules d'Euler du mouvement libre de rotation d'un solide dans lesquels le couple exercé par les propulseurs est introduit ;

ce qui peut se voir dans le cas où les directions $(\vec{d}_r, \vec{d}_p, \vec{d}_y)$ sont les directions principales d'inertie. Dans ce cas la matrice \mathcal{I} est diagonale et on trouve que

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega}_r \\ \dot{\omega}_r \\ \dot{\omega}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathcal{I}_{pp} - \mathcal{I}_{yy}}{\mathcal{I}_{rr}} & \omega_p & \omega_y \\ \frac{\mathcal{I}_{yy} - \mathcal{I}_{rr}}{\mathcal{I}_{pp}} & \omega_y & \omega_r \\ \frac{\mathcal{I}_{rr} - \mathcal{I}_{pp}}{\mathcal{I}_{yy}} & \omega_r & \omega_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{a}{2\mathcal{I}_{rr}} (f_{fl} + f_{bl} - f_{fr} - f_{br}) \\ \frac{a}{2\mathcal{I}_{pp}} (f_{fl} + f_{fr} - f_{br} - f_{bl}) \\ \frac{c_{fl} + c_{fr} + c_{bl} + c_{br}}{\mathcal{I}_{yy}} \end{pmatrix}$$

Ce qui permet de voir que c'est : la somme des couples c qui crée le mouvement de lacet ; la différence entre les forces f à gauche et à droite qui crée le mouvement de roulis ; la différence entre les forces f avant et arrière qui crée le mouvement de tangage.

Le système dynamique de la base $(\vec{d}_r, \vec{d}_p, \vec{d}_y)$

► Le système dynamique de la base $(\vec{d}_r, \vec{d}_p, \vec{d}_y)$ s'écrit

$$\dot{\underline{\vec{d}}} = \underline{\underline{\Omega}} \underline{\vec{d}} \quad ; \quad \dot{\underline{\omega}} = \underline{\underline{\mathcal{I}}}^{-1} (\underline{\underline{\Omega}} \underline{\underline{\mathcal{I}}} \underline{\omega} + \underline{\underline{c}})$$

où

$$\underline{\underline{c}} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2}(f_{fl} + f_{bl} - f_{fr} - f_{br}) \\ \frac{a}{2}(f_{fl} + f_{fr} - f_{br} - f_{bl}) \\ c_{fl} + c_{fr} + c_{bl} + c_{br} \end{pmatrix} ; \underline{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_r \\ \omega_p \\ \omega_y \end{pmatrix} ; \underline{\vec{d}} = \begin{pmatrix} \vec{d}_r \\ \vec{d}_p \\ \vec{d}_y \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\Omega}} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_y & -\omega_p \\ -\omega_y & 0 & \omega_r \\ \omega_p & -\omega_r & 0 \end{pmatrix} ; \underline{\underline{\mathcal{I}}} = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_{rr} & \mathcal{I}_{rp} & \mathcal{I}_{ry} \\ \mathcal{I}_{rp} & \mathcal{I}_{pp} & \mathcal{I}_{py} \\ \mathcal{I}_{ry} & \mathcal{I}_{py} & \mathcal{I}_{yy} \end{pmatrix}$$

► Il comporte 3×3 (les composantes des $\vec{d}_r, \vec{d}_p, \vec{d}_y$ dans la base $(\vec{k}_x, \vec{k}_y, \vec{k}_z)$) + 3 (les $\omega_r, \omega_p, \omega_y$) donc 12 variables. Ce qui est un peu sur-abondant puisque les $\vec{d}_r, \vec{d}_p, \vec{d}_y$ forment un trièdre orthonormé.

Introduire des angles d'Euler ?

- Si on paramétrise les $\vec{d}_r, \vec{d}_p, \vec{d}_y$ au moyen des angles d'Euler (ψ précession, θ nutation, ϕ rotation propre) :

$$\begin{aligned}\vec{k}'_x &= \cos \psi \vec{k}_x + \sin \psi \vec{k}_y & \vec{k}'_y &= -\sin \psi \vec{k}_x + \cos \psi \vec{k}_y & \vec{k}'_z &= \vec{k}_z \\ \vec{k}''_y &= \cos \theta \vec{k}'_y + \sin \theta \vec{k}'_z & \vec{k}''_z &= -\sin \theta \vec{k}'_y + \cos \theta \vec{k}'_z & \vec{k}''_x &= \vec{k}'_x \\ \vec{d}_r &= \cos \phi \vec{k}''_x + \sin \phi \vec{k}''_y & \vec{d}_p &= -\sin \phi \vec{k}''_x + \cos \phi \vec{k}''_y & \vec{d}_y &= \vec{k}'_z\end{aligned}$$

on peut résoudre les équations $\dot{\vec{d}} = \underline{\underline{\Omega}}$ par rapport aux dérivées temporelle $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}$ et obtenir que : $\dot{\theta} = \omega_r \cos \varphi - \omega_p \sin \varphi$

$$\dot{\psi} = \frac{\omega_r \sin \varphi + \omega_p \cos \varphi}{\sin \vartheta}, \dot{\phi} = \frac{\omega_y \sin \vartheta - (\omega_r \sin \varphi + \omega_p \cos \varphi) \cos \vartheta}{\sin \vartheta}$$

Ce n'est pas satisfaisant parce que θ ne peut être nul ; alors qu'il l'est nécessairement dans le vol stationnaire. C'est dû au fait que lorsque la nutation est nulle les angles de précession et de rotation ont la même action. Cette paramétrisation n'est pas trop adaptée au cas du drone.

Le système dynamique de la base $(\vec{d}_r, \vec{d}_p, \vec{d}_y)$ en composantes

- L'expression des vecteurs $\vec{d}_r, \vec{d}_p, \vec{d}_y$ dans la base $(\vec{k}_x, \vec{k}_y, \vec{k}_z)$ se fait en posant

$$\vec{d} = \underline{\underline{d}} \vec{k} \text{ avec } \underline{\underline{d}} = \begin{pmatrix} d_r^x & d_r^y & d_r^z \\ d_p^x & d_p^y & d_p^z \\ d_y^x & d_y^y & d_y^z \end{pmatrix} ; \vec{k} = \begin{pmatrix} \vec{k}_x \\ \vec{k}_y \\ \vec{k}_z \end{pmatrix}$$

- Le système dynamique de cette base $(\vec{d}_r, \vec{d}_p, \vec{d}_y)$ s'exprime alors en composantes comme

$$\dot{\underline{\underline{d}}} = \underline{\underline{\Omega}} \underline{\underline{d}} ; \dot{\underline{\omega}} = \underline{\underline{\mathcal{I}}}^{-1} (\underline{\underline{\Omega}} \underline{\underline{\mathcal{I}}} \underline{\omega} + \underline{\underline{c}})$$

avec toujours

$$\underline{\underline{c}} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} (f_{fl} + f_{bl} - f_{fr} - f_{br}) \\ \frac{a}{2} (f_{fl} + f_{fr} - f_{br} - f_{bl}) \\ c_{fl} + c_{fr} + c_{bl} + c_{br} \end{pmatrix} ; \underline{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_r \\ \omega_p \\ \omega_y \end{pmatrix} ; \underline{\underline{\Omega}} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_y & -\omega_p \\ -\omega_y & 0 & \omega_r \\ \omega_p & -\omega_r & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathcal{I}}} = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_{rr} & \mathcal{I}_{rp} & \mathcal{I}_{ry} \\ \mathcal{I}_{rp} & \mathcal{I}_{pp} & \mathcal{I}_{py} \\ \mathcal{I}_{ry} & \mathcal{I}_{py} & \mathcal{I}_{yy} \end{pmatrix}$$

Système dynamique du centre de gravité

- La seconde loi de Newton permet d'écrire la loi de mouvement du centre de gravité \vec{X} du drone

$$m \ddot{\vec{X}} = (f_{fl} + f_{fr} + f_{bl} + f_{br}) \vec{d}_y - m g \vec{k}_z$$

- Soit en composantes

$$\ddot{\underline{X}} = \frac{f}{m} \underline{d}_y - \underline{g} \quad \text{avec } f = (f_{fl} + f_{fr} + f_{bl} + f_{br})$$

$$\underline{d}_y = \begin{pmatrix} d_y^x \\ d_y^y \\ d_y^z \end{pmatrix} ; \vec{X} = {}^t \underline{X} \vec{k} ; \underline{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; \underline{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix}$$

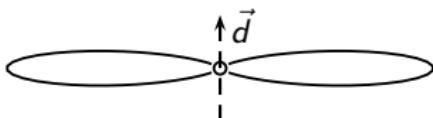
- Avec celles de la planche précédente ces équations constituent le système dynamique du mouvement du drone. Mais ce système n'est pas complet. Il manque les forces dissipatives dont l'introduction est nécessaire pour obtenir des simulations réalistes.

2^o partie : Paramétrisation des force et couple des propulseurs

- Le système dynamique pour ainsi dire vierge étant établi, cette partie a pour objectif de préciser la forme des force et couple des propulseurs.
- Ce ne sera cependant fait que par une approche pragmatique à l'aide de modèles *ad hoc*.
- Les références aux leçons du cours qui pourraient permettre d'obtenir des modèles plus complets sont cependant évoqués ;
- Mais la difficulté de cette partie de la mécanique des fluides qu'on appelle l'aérodynamique fera que ces modèles plus complets seront loin d'être bien décrits.

Poussée de l'hélice

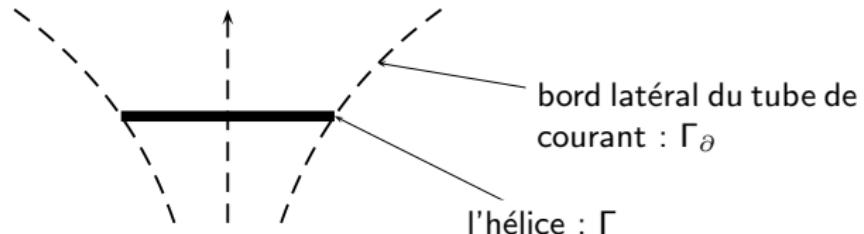
- Le problème élémentaire à résoudre est celui d'une hélice seule, tournant à la vitesse angulaire Ω autour de son axe \vec{d} dans l'espace libre rempli d'air



- En tournant, l'hélice pousse l'air ; elle crée donc un champ de vitesses dans l'air ; ce champ de vitesses s'accompagne d'un champ de pression ; les champs de pression et de vitesses concourent à créer une densité de forces sur la surface de l'hélice ; les sommes sur la surface de cette densité de force et de leur produit vectoriel avec la position sont les force et couple cherchés.
- Ce problème est certes élémentaire dans son exposé mais il est loin d'être trivial à résoudre (cf. leçon 6 pour un exposé des difficultés) ; pour cependant obtenir des éléments de modélisation on peut utiliser des approximations comme l'approche de Froude qui suit.

Approche dite de Froude de la poussée de l'hélice 1/3

- L'idée est déjà d'appliquer une version *ad hoc* du principe de Bernoulli ; voici en coupe (dans le plan \vec{k}_z, \vec{k}_x et pour $\vec{d}_y = \vec{k}_z$) la géométrie de la situation



- On se place dans le tube de courant. On suppose que la vitesse de l'air juste au dessus de l'hélice est $-\dot{z} \vec{k}_z$ où \dot{z} est la vitesse ascensionnelle de l'hélice et que la pression est p ; qu'elle est $-v_\infty \vec{k}_z$ juste en dessous avec la pression P ; le théorème de Bernoulli dans le tube de courant fournit (ρ la masse volumique de l'air)

$$p + \rho \frac{\dot{z}^2}{2} = P + \rho \frac{v_\infty^2}{2}$$

D'où vient que le saut de pression dû au mouvement de l'hélice est

$$\Delta P = \frac{\rho}{2} (v_\infty^2 - \dot{z}^2)$$

- On introduit ensuite la vitesse $-v \vec{k}_z$ dans l'hélice et on affirme que celle-ci est la moyenne de \dot{z} et v_∞ , soit

$$v = \frac{\dot{z} + v_\infty}{2}$$

Approche dite de Froude de la poussée de l'hélice 2/3

Cette vitesse dans l'hélice est utilisée pour éliminer la vitesse v_∞ dans l'expression du saut de pression, soit

$$\Delta P = 2 \rho v (v - \dot{z})$$

Elle permet aussi exprimer le débit d'air dans l'hélice qui est $d = \pi R^2 v$ où R est le rayon de l'hélice ; et avec le débit on dispose de la puissance nécessaire pour entraîner l'hélice, soit

$$\mathcal{P} = \Delta P d = 2 \pi R^2 \rho v^2 (v - \dot{z})$$

► On relie maintenant la vitesse v à la fréquence de rotation N de l'hélice par

$$v = \delta N$$

où δ est le pas de l'hélice. L'image mentale est qu'une hélice est une sorte de vis qui avance dans l'espace de δ lorsque l'hélice fait un tour.

► L'« analyse » est alors presque terminée. Les saut de pression et puissance s'expriment en fonction de N comme

$$\Delta P = 2 \rho \delta^2 N \left(N - \frac{\dot{z}}{\delta} \right) ; \mathcal{P} = 2 \pi \rho \delta^3 R^2 N^2 \left(N - \frac{\dot{z}}{\delta} \right)$$

Approche dite de Froude de la poussée de l'hélice 3/3

- L'expression du saut de pression ΔP se relie à la force exercée vers le haut sur l'hélice par le mouvement de l'air, c'est la portance

$$F = \Delta P \pi R^2 = 2 \pi \rho \delta^2 R^2 N \left(N - \frac{\dot{z}}{\delta} \right)$$

- La puissance \mathcal{P} est la puissance que doit fournir le moteur qui génère la rotation, le couple correspondant est

$$\Gamma = \frac{\mathcal{P}}{\Omega} = \rho \delta^3 R^2 N \left(N - \frac{\dot{z}}{\delta} \right)$$

- De part l'hypothèse faite sur la relation entre vitesse de rotation et avancée de l'hélice ($v = \delta N$), on obtient bien sûr que

$$\Gamma = \frac{\delta}{2 \pi} F$$

Approche alternative et synthèse

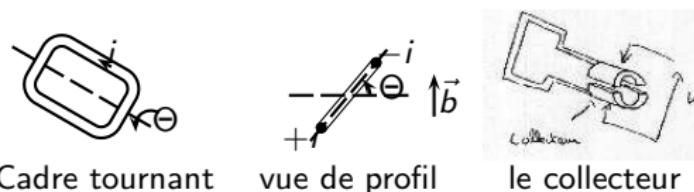
- On peut tout à fait ne pas être convaincu par l'approche précédente qui possède au moins deux faiblesses connexes : les pales de l'hélice sont approximées par un disque continu sur lequel la pression serait discontinue ; la géométrie réelle de ces pales est prise en compte par le paramètre δ , le pas de l'hélice, et ce pas est utilisé pour écrire la relation très rigide sur la relation entre vitesse de rotation et avancée de l'hélice ($v = \delta/2 \pi \Omega$).
- Il existe une approche moins grossière, appelée l'approche des éléments de pale (blade elements), mais celle-ci nécessite les notions de la leçon 6 pour être explicitée.
- La faiblesse donc de l'approche qui a conduit aux expressions de la portance et du couple moteur fait qu'il est préférable de ne garder de ces expressions que la forme de la dépendance en Ω et pas la signification des coefficients, c'est à dire que les portance et couple dans la suite seront

$$F = k N \left(N - \frac{\dot{z}}{\delta} \right) ; \Gamma = k' N \left(N - \frac{\dot{z}}{\delta} \right)$$

où k , k' et δ sont vus comme des coefficients phénoménologiques à identifier (en particulier on ne pose pas comme *a priori* que $k' = k \delta/2 \pi$).

Moteur coreless à courant continu et à excitation par des aimants

- Une des variétés de moteurs utilisés pour les drones semble être celle des moteurs à courant continu à collecteur dont l'excitation est générée par des aimants permanents ; sauf erreur, c'est ce qui correspond à la dénomination coreless (ce qualificatif indiquant qu'il n'y a pas de circuit magnétique).
- Si c'est bien cela, la forme la plus élémentaire du moteur est celle du cadre tournant dans le champ magnétique de l'aimant



a priori le moteur a une paire de pôle pour qu'il soit le plus rapide possible.

L'analyse de ce système a dû être faite dans le cours « Circuit électriques et Applications » ; elle sera approfondie dans la leçon 9.

Le modèle du moteur coreless

- En appelant Φ le flux d'excitation, e et i les tension et courant du composant 'moteur' et en négligeant le transitoire électrique les équations électriques (où le régime transitoire est négligé) sont

$$e = 2 \pi \Phi N + \mathcal{R} i ; \quad \Gamma_m = \Phi i$$

où N est la fréquence de rotation de l'arbre (la vitesse angulaire est $2 \pi N$) ; Γ_m est le couple moteur. Les coefficients Φ , le flux du champ magnétique de l'aimant dans les enroulements d'induit, et \mathcal{R} , la résistance de cet enroulement d'induit, sont à mesurer sur le moteur.

- On obtient la caractéristique couple/vitesse par élimination du courant i soit

$$\Gamma_m = \frac{2 \pi \Phi^2}{\mathcal{R}} \left(\frac{e}{2 \pi \Phi} - N \right)$$

Application au drone

- Chacune des hélices est entraînée par un moteur indépendant ; les tensions appliquées aux moteurs sont e_{fl} , e_{fr} , e_{bl} , e_{br} , les vitesses de rotation des hélices N_{fl} , N_{fr} , N_{bl} , N_{br} (pour éviter ω qui est utilisé pour les composantes du vecteur de rotation instantané) et donc, pour l'hélice fl et son moteur

$$J \dot{N}_{fl} = \frac{2 \pi \Phi^2}{\mathcal{R}} \left(\frac{e}{2 \pi \Phi} - N_{fl} \right) - k' N_{fl} \left(N_{fl} - \frac{\dot{\zeta}}{\delta} \right)$$

$$\dot{\zeta} = \dot{\vec{X}} \cdot \vec{d}_y = \dot{x} d_y^x + \dot{y} d_y^y + \dot{z} d_y^z = {}^t \underline{d}_y \dot{\underline{X}}$$

$\dot{\zeta}$ est la vitesse du CDG du drone dans la direction de poussée des propulseurs.

Et les relations sont, en changeant fl en br les mêmes pour br ; et elle sont encore les mêmes pour fr et bl à ceci près que le signe des c_{fr} et c_{bl} sont changés pour prendre en compte que les moteurs ne tournent pas dans le même sens que les fl et br .

La nécessité du découplage

- L'examen de la production de force et couple sur les moteurs fait apparaître un système dynamique qui porte sur les vitesses angulaires de moteurs ;
- si celui-ci avait été plus poussé, il aurait introduit un autre système dynamique qui aurait porté sur les courants d'alimentation (en ajoutant les termes inductifs dans les équations du moteur à courant continu).
Et, comme il est vraisemblable que l'alimentation de ce moteur à courant continu passe par un hacheur, il y aurait sans doute d'autres variables électriques à considérer pour être complet.
- D'ailleurs, *in fine*, la batterie elle-même n'est pas un composant fournissant le courant demandé sous une tension déterminée. Elle est le siège de mécanismes internes qui se modélisent encore par l'introduction de variables dépendant de systèmes dynamiques.
- Pour donc ne pas faire grossir indéfiniment le système dynamique du mouvement du drone, il est nécessaire de procéder à une coupure dans la chaîne dont la description vient d'être esquissée. C'est ce qu'on appelle un découplage.

Le résultat du découplage

- Le paramètre qui couple le système donnant les fréquences de rotation N des moteurs au mouvement du drone est $\dot{\zeta}$ qui dépend des directions $\vec{d}_r, \vec{d}_p, \vec{d}_y$ et de la vitesse \vec{X} dans l'équation (toujours pour fl)

$$2\pi J \dot{N}_{fl} = \frac{2\pi\Phi^2}{\mathcal{R}} \left(\frac{e}{2\pi\Phi} - N_{fl} \right) - k' N_{fl} \left(N_{fl} - \frac{\dot{\zeta}}{\delta} \right)$$

- Le découplage consiste à supposer que la fréquence N_{fl} s'adapte instantanément à la valeur de $\dot{\zeta}$; soit admettre que $J = 0$ et donc N_{fl} est la solution positive de l'équation algébrique obtenue

$$N_{fl} = - \left(\frac{\Phi^2 \pi}{\mathcal{R} k'} - \frac{\dot{\zeta}}{2\delta} \right) + \sqrt{\left(\frac{\Phi^2 \pi}{\mathcal{R} k'} - \frac{\dot{\zeta}}{2\delta} \right)^2 + \frac{\Phi e_{fl}}{\mathcal{R} k'}}$$

- D'où les expressions des couples et forces du moteur fl

$$c_{fl} = \frac{2\pi\Phi^2}{\mathcal{R}} \left(\frac{e_{fl}}{2\pi\Phi} - N_{fl} \right) ; f_{fl} = \frac{k}{k'} c_{fl}$$

en fonction de la tension de commande e_{fl} et de la vitesse $\dot{\zeta}$.

Expressions des force et couple des 4 propulseurs

$$fl : \quad N_{fl} = - \left(\frac{\Phi^2 \pi}{\mathcal{R} k'} - \frac{\dot{\zeta}}{2 \delta} \right) + \sqrt{\left(\frac{\Phi^2 \pi}{\mathcal{R} k'} - \frac{\dot{\zeta}}{2 \delta} \right)^2 + \frac{\Phi e_{fl}}{\mathcal{R} k'}} \\ c_{fl} = \frac{2 \pi \Phi^2}{\mathcal{R}} \left(\frac{e_{fl}}{2 \pi \Phi} - N_{fl} \right) ; \quad f_{fl} = \frac{k}{k'} c_{fl}$$

$$br : \quad N_{br} = - \left(\frac{\Phi^2 \pi}{\mathcal{R} k'} - \frac{\dot{\zeta}}{2 \delta} \right) + \sqrt{\left(\frac{\Phi^2 \pi}{\mathcal{R} k'} - \frac{\dot{\zeta}}{2 \delta} \right)^2 + \frac{\Phi e_{br}}{\mathcal{R} k'}} \\ c_{br} = \frac{2 \pi \Phi^2}{\mathcal{R}} \left(\frac{e_{br}}{2 \pi \Phi} - N_{br} \right) ; \quad f_{br} = \frac{k}{k'} c_{br}$$

même expression pour les forces mais le couple change de signe

$$fr : \quad N_{fr} = - \left(\frac{\Phi^2 \pi}{\mathcal{R} k'} - \frac{\dot{\zeta}}{2 \delta} \right) + \sqrt{\left(\frac{\Phi^2 \pi}{\mathcal{R} k'} - \frac{\dot{\zeta}}{2 \delta} \right)^2 + \frac{\Phi e_{fr}}{\mathcal{R} k'}} \\ c_{fr} = - \frac{2 \pi \Phi^2}{\mathcal{R}} \left(\frac{e_{fr}}{2 \pi \Phi} - N_{fr} \right) ; \quad f_{fr} = - \frac{k}{k'} c_{fr}$$

$$bl : \quad N_{bl} = - \left(\frac{\Phi^2 \pi}{\mathcal{R} k'} - \frac{\dot{\zeta}}{2 \delta} \right) + \sqrt{\left(\frac{\Phi^2 \pi}{\mathcal{R} k'} - \frac{\dot{\zeta}}{2 \delta} \right)^2 + \frac{\Phi e_{bl}}{\mathcal{R} k'}} \\ c_{bl} = - \frac{2 \pi \Phi^2}{\mathcal{R}} \left(\frac{e_{bl}}{2 \pi \Phi} - N_{bl} \right) ; \quad f_{bl} = - \frac{k}{k'} c_{bl}$$

Système dynamique du vol en l'état

► C'est $\dot{\underline{d}} = \underline{\Omega} \underline{d}$; $\dot{\underline{\omega}} = \underline{\underline{\mathcal{I}}}^{-1} (\underline{\Omega} \underline{\underline{\mathcal{I}}} \underline{\omega} + \underline{\underline{c}})$; $\ddot{\underline{X}} = \frac{f}{m} \underline{d}_y - \underline{g}$

où $\underline{\underline{c}} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} (f_{fl} + f_{bl} - f_{fr} - f_{br}) \\ \frac{a}{2} (f_{fl} + f_{fr} - f_{br} - f_{bl}) \\ c_{fl} + c_{fr} + c_{bl} + c_{br} \end{pmatrix}$; $\underline{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_r \\ \omega_p \\ \omega_y \end{pmatrix}$; $\underline{d}_y = \begin{pmatrix} d_y^x \\ d_y^y \\ d_y^z \end{pmatrix}$;

$\underline{\underline{d}} = \begin{pmatrix} d_r^x & d_p^y & d_y^z \\ d_p^x & d_p^y & d_p^z \\ d_y^x & d_y^y & d_y^z \end{pmatrix}$; $\underline{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_y & -\omega_p \\ -\omega_y & 0 & \omega_r \\ \omega_p & -\omega_r & 0 \end{pmatrix}$; $\underline{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$;

$\underline{\underline{\mathcal{I}}} = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_{rr} & \mathcal{I}_{rp} & \mathcal{I}_{ry} \\ \mathcal{I}_{rp} & \mathcal{I}_{pp} & \mathcal{I}_{py} \\ \mathcal{I}_{ry} & \mathcal{I}_{py} & \mathcal{I}_{yy} \end{pmatrix}$; $f = f_{fl} + f_{bl} + f_{fr} + f_{br}$

et où les $f_{fl}, f_{bl}, f_{fr}, f_{br}$ et $c_{fl}, c_{bl}, c_{fr}, c_{br}$ ont les expressions de la planche précédente, compte tenu que $\dot{\zeta} = {}^t \underline{d}_y \dot{\underline{X}}$.

► la solution de ce système peut être calculée si les $e_{fl}, e_{bl}, e_{fr}, e_{br}$, les coefficients $\underline{\underline{\mathcal{I}}}$, m , \mathcal{R} , Φ , δ , k , k' et les conditions initiales sont connus.

L'ascension 1/2

► Si initialement, en $t = 0$, $\dot{X} = 0$, $\dot{\omega} = 0$, $\vec{d}_y = \vec{k}_z$, $\vec{d}_r = \vec{k}_x$, $\vec{d}_p = \vec{k}_y$ et que les tensions sont brutalement mises à la même valeur e alors une inspection des équations précédentes fait apparaître que :

* Il n'y a pas rotation : $t > 0 \Rightarrow \vec{d}_y = \vec{k}_z$, $\vec{d}_r = \vec{k}_x$, $\vec{d}_p = \vec{k}_y$ et $\dot{\omega} = 0$;

* Il n'y a pas de mouvement du CDG suivant \vec{k}_x et \vec{k}_y :
 $t > 0 \Rightarrow \dot{x} = \dot{y} = 0$;

* Le mouvement suivant \vec{k}_z et déterminé par $t > 0 \Rightarrow \dot{\zeta} = \dot{z}$ et

$$N = (N_{fl} = N_{fr} = \dots) = - \left(\frac{\Phi^2 \pi}{\mathcal{R} k'} - \frac{\dot{z}}{2 \delta} \right) + \sqrt{\left(\frac{\Phi^2 \pi}{\mathcal{R} k'} - \frac{\dot{z}}{2 \delta} \right)^2 + \frac{\Phi e}{\mathcal{R} k'}}$$

$$f = 4 \frac{k}{k'} \frac{2 \pi \Phi^2}{\mathcal{R}} \left(\frac{e}{2 \pi \Phi} - N \right)$$

$$\ddot{z} = \frac{f}{m} - g$$

L'ascension 2/2

► Soit, en regroupant,

$$\ddot{z} = \frac{k}{k'} \frac{8\pi\Phi^2}{m\mathcal{R}} \left(\frac{e}{2\pi\Phi} + \left(\frac{\Phi^2\pi}{\mathcal{R}k'} - \frac{\dot{z}}{2\delta} \right) - \sqrt{\left(\frac{\Phi^2\pi}{\mathcal{R}k'} - \frac{\dot{z}}{2\delta} \right)^2 + \frac{\Phi e}{\mathcal{R}k'}} \right) - g$$

► C'est une équation différentielle non-linéaire. Elle admet un point stationnaire ($\dot{z} = 0$, $\ddot{z} = 0$) pour

$$\frac{e}{2\pi\Phi} + \left(\frac{\Phi^2\pi}{\mathcal{R}k'} \right) - \sqrt{\left(\frac{\Phi^2\pi}{\mathcal{R}k'} \right)^2 + \frac{\Phi e}{\mathcal{R}k'}} = \frac{k'}{k} \frac{m g \mathcal{R}}{8\pi\Phi^2}$$

qui peut être considérée comme une équation permettant de déterminer la valeur limite de e au delà de laquelle le mouvement est accéléré vers le haut (ascension) et en deçà de laquelle c'est vers les z négatifs (chute).

3^o partie : La dissipation

- Le modèle des planches précédentes ne contient pas de termes prenant en compte la dissipation visqueuse qui accompagne le drone dans son mouvement ;
- C'est l'objectif de cette partie de l'introduire ; ou tout du moins d'introduire l'ensemble de *trucs* qui permet de donner l'illusion qu'on peut la prendre en compte.

Approche phénoménologique de la traînée 1/2

- La traînée d'un objet se déplaçant dans un fluide de masse volumique ρ est un coefficient, appelé Cx , à partir duquel la force traduisant la résistance à l'avancée de l'objet, lorsqu'il est à la vitesse v , la surface S étant la surface projetée dans le plan normal à la vitesse, s'écrit

$$F = \frac{1}{2} \rho v^2 S Cx$$

- La traînée d'une boule de rayon R a été particulièrement étudiée tant expérimentalement que numériquement ; si on introduit le nombre de Reynolds Re comme

$$Re = \frac{\rho v 2 R}{\mu}$$

où μ est la viscosité dynamique du fluide (supposé newtonien) alors

$$Cx = \begin{cases} 24/Re & \text{si } 0 < Re < 1.917 \text{ Stokes} \\ 18.5/Re^{0.6} & \text{si } 1.917 < Re < 410.837 \text{ Van Allen} \\ 0.5 & \text{si } 410.837 < Re < 3.0 \cdot 10^5 \text{ Newton} \end{cases}$$

(la précision des limites entre plages n'est utile que pour avoir un tracé continu ; et de toute façon la relation n'est qu'une formule approximative.)

Approche phénoménologique de la traînée 2/2

- Pour l'air (à température et pression ambiante)

$$\rho = 1.117 \text{ kg/m}^3 ; \mu = 18.5 \cdot 10^5 \text{ Pa s} \Rightarrow Re = 120 \nu R \cdot 10^3$$

- Le nombre de Reynolds pour les valeurs $R \approx 5 \text{ cm}$ et $\nu > 0.25 \text{ m/s} = 0.07 \text{ km/h}$ est donc tel que $Re > 410$; ce qui autorise à supposer que le coefficient C_x pour une boule de diamètre de cet ordre et se déplaçant à ces vitesses est un nombre fixe de l'ordre de 0.5.
- La force qui s'oppose au déplacement est alors en carré de la vitesse

$$f = \frac{\pi}{4} \rho R^2 \nu^2 = \frac{3}{16} \frac{M_{\text{air}} \nu^2}{R} \left(\begin{array}{l} M_{\text{air}} \text{ la masse d'air de même} \\ \text{volume que la boule} \end{array} \right)$$

- On pourra se rendre compte de tout cela en examinant la physique du vol libre de Felix Baumgartner

La traînée du déplacement linéaire du drone 1/2

- Le drone n'est pas une boule, en faisant abstraction des hélices (dont la traînée propre est *a priori* prise en compte dans le modèle du propulseurs) c'est plutôt une sorte de parallélépipède rectangle dont chacun des trois côtés est distinct des deux autres.
- Il faudrait donc rechercher des études aérodynamique d'un parallélépipède en mouvement dans l'air. Mais on peut aussi utiliser une approximation dans laquelle on conserve la valeur de C_x de 0.5 ; il reste quand même à calculer la surface projetée de ce parallélépipède dans le plan normal au déplacement...
- Du coup on décide que le parallélépipède est finalement un ellipsoïde de manière à disposer une formule close pour cette surface : si dans le repère $(\vec{X}, \vec{d}_r, \vec{d}_p, \vec{d}_y)$ les coordonnées du point courant sont $r', p'y'$, l'ellipsoïde a pour équation

$$\frac{r'^2}{\alpha^2} + \frac{p'^2}{\beta^2} + \frac{y'^2}{\gamma^2} = 1$$

la direction de déplacement est

$$\dot{\vec{X}}/|\dot{\vec{X}}| = {}^t\vec{k} \dot{\vec{X}}/|\dot{\vec{X}}|$$

Il faut l'exprimer dans la base $(\vec{d}_r, \vec{d}_p, \vec{d}_y)$.

La traînée du déplacement linéaire du drone 2/2

Puisque

$$\vec{d} = \underline{\underline{d}} \vec{k}; \vec{X} = {}^t \underline{\underline{k}} \vec{X} \Rightarrow \dot{\vec{X}}/|\dot{\vec{X}}| = {}^t \underline{\underline{d}} {}^t \underline{\underline{d}}^{-1} \dot{\vec{X}}/|\dot{\vec{X}}|$$

il vient que les coordonnées de la direction de déplacement dans la base $(\vec{d}_r, \vec{d}_p, \vec{d}_y)$ sont

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = {}^t \underline{\underline{d}}^{-1} \dot{\vec{X}}/|\dot{\vec{X}}|$$

► D'autre part¹ la surface de la projection de l'ellipsoïde dans un plan normal à un vecteur normé de coordonnées (u, v, w) est

$$S = \pi \sqrt{u^2 \beta^2 \gamma^2 + v^2 \gamma^2 \alpha^2 + w^2 \alpha^2 \beta^2}$$

En plus des données géométriques α, β, γ , cette surface S dépend de $\underline{\underline{d}}$ et $\dot{\vec{X}}$.

► Ainsi la force de trainée du drone est-elle

$$\vec{F}_d = -\frac{1}{2} \rho C_x S |\dot{\vec{X}}| \dot{\vec{X}}$$

1. cf. par exemple <http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,705200,705779>

La traînée de la rotation du drone 1/2

- Le déplacement linéaire n'est pas le seul à engendrer une résistance de l'air. Il y a aussi la rotation.
- Toujours avec des approximations, on peut considérer que le couple résistant est engendré par des forces de traînées égales et opposées. Pratiquement la rotation se fait normalement au vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega}$ et donc, appelant ce vecteur normal (et normé) \vec{n} (donc tel que $\vec{n} \cdot \vec{\Omega} = 0$), les deux forces sont de la forme

$$\vec{f}_r = -\frac{1}{2} \rho \frac{S'}{2} C_x \left(\lambda |\vec{\Omega}| \right)^2 \vec{n}$$

où S' est la surface maximale qu'on peut obtenir par la coupe de l'ellipsoïde avec un plan passant par l'axe de rotation et λ est la distance à l'axe de rotation du point d'application des forces.

Le couple exercé par ces deux forces est donc

$$\vec{\Gamma}_r = \lambda \vec{\tau} \times \vec{f}_r$$

où $\vec{\tau}$ le vecteur normé orthogonal à \vec{n} et $\vec{\Omega}$, soit $\vec{\tau} = \vec{n} \times \vec{\Omega} / |\vec{\Omega}|$, le couple s'exprime donc comme

$$\vec{\Gamma}_r = -\frac{1}{2} \rho \frac{S'}{2} C_x |\lambda|^3 |\vec{\Omega}| \vec{\Omega}$$

La recherche de S' et λ

- ▶ Pour S' , c'est un problème de géométrie analytique connexe à celui de la planche 37 : $\vec{n} = \vec{\Omega}/|\vec{\Omega}|$ est une donnée ; on trouve $\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2$ tels que $\vec{n}, \vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2$ forment une base orthonormée ; on considère l'intersection de l'ellipsoïde avec un plan tournant autour de \vec{n} , soit dirigé suivant \vec{n} et $\cos \phi \vec{\tau}_1 + \sin \phi \vec{\tau}_2$, cette intersection est une ellipse de surface dépendant de ϕ et dont l'expression est donnée planche 37 (les coordonnées u, v, w sont celles de $-\sin \phi \vec{\tau}_1 + \cos \phi \vec{\tau}_2$) ; on cherche ϕ qui maximise cette surface (l'argument maximisant s'exprime analytiquement) et on obtient ainsi la surface S'
- ▶ Pour λ il faudrait travailler un peu plus pour caractériser l'ellipse précédente et chercher le centre de gravité de sa moitié située d'une côté de l'axe \vec{n} . Si on n'en a pas envie, parce qu'on doute de toute façon que le choix de ce centre de gravité soit ce qu'il faut prendre pour le point d'application de la force, on peut toujours donner une valeur approchée de λ à partir de la surface. Par exemple

$$\lambda = \frac{\sqrt{S'/\pi}}{2}$$

Synthèse

- Les force et couple dus à la résistance de l'air sont

$$\vec{F}_d = -\frac{\rho S C_x}{2} |\dot{\vec{X}}| \dot{\vec{X}} \text{ avec } S = \pi \sqrt{u^2 \beta^2 \gamma^2 + v^2 \gamma^2 \alpha^2 + w^2 \alpha^2 \beta^2}$$

et

$$\vec{\Gamma}_r = -\frac{\rho S' |\lambda|^3 C_x}{4} |\vec{\Omega}| \vec{\Omega}$$

où, par exemple, pour

$$\vec{\Omega}/|\vec{\Omega}| = \left(\cos \Psi \vec{d}_r + \sin \Psi \vec{d}_p \right) \sin \Theta + \vec{d}_y \cos \Theta$$

$$S' = \pi \sqrt{\sqrt{A^2 + B^2} + C} ; \lambda = \frac{\sqrt{S'/\pi}}{2}$$

avec

$$A = \frac{(2 \cos \Psi \sin \Psi \cos \Theta \beta^2 - 2 \cos \Psi \sin \Psi \cos \Theta \alpha^2) \gamma^2}{2}$$

$$B = \left(\frac{(\sin \Psi)^2 \beta^2 + (\cos \Psi)^2 \alpha^2}{2} - \frac{(\cos \Psi)^2 (\cos \Theta)^2 \beta^2 + (\sin \Psi)^2 (\cos \Theta)^2 \alpha^2}{2} \right) \gamma^2 - \frac{(\sin \Theta)^2 \alpha^2 \beta^2}{2}$$

$$C = \left(\frac{(\cos \Psi)^2 (\cos \Theta)^2 \beta^2 + (\sin \Psi)^2 (\cos \Theta)^2 \alpha^2}{2} + \frac{(\sin \Psi)^2 \beta^2 + (\cos \Psi)^2 \alpha^2}{2} \right) \gamma^2 + \frac{(\sin \Theta)^2 \alpha^2 \beta^2}{2}$$

4^e partie : Points à considérer *a posteriori*

- L'analyse semble finie mais il reste quelques points annexes à examiner.
- D'abord l'échauffement : après épuisement de la batterie les éléments du drone sont chauds au toucher. Très certainement, si on disposait de batterie de meilleur rapport énergie/poids on arriverait à détériorer soit les moteurs soit l'alimentation lors d'une séquence de vol.
- Ensuite les aspects de mécanique de structure : un petit drone peut chuter sans trop de casse ce qui n'est plus le cas si sa taille augmente. Ça demande des explications.
- les mécanismes interne à la batterie demanderaient une clarification (mais ce ne sera pas fait).

Conclusion No 1 : le système dynamique

- C'est

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{\underline{d}} & = & \underline{\Omega} \underline{d} \\ \dot{\underline{\omega}} & = & \underline{\mathcal{I}}^{-1} \left(\underline{\Omega} \underline{\mathcal{I}} \underline{\omega} + \underline{c} - \frac{\rho S' |\lambda|^3 Cx}{4} |\underline{\omega}| \underline{\omega} \right) \\ \ddot{\underline{X}} & = & \frac{1}{m} \left(f \underline{d}_y - \frac{\rho S Cx}{2} |\dot{\underline{X}}| \dot{\underline{X}} \right) - \underline{g} \end{array} \right.$$

où les coefficients (éventuellement dépendants des variables dynamiques comme S , S' , λ) sont définis dans les planches précédentes.

- Un script maxima fournissant ce système est disponible :
- Mais il faut avoir à l'esprit que la question de la commande du vol demande l'analyse de ce système qui n'est pas du tout abordée !
- Il faut également avoir à l'esprit que la question de l'identification des coefficients du modèle n'est pas non plus abordée...

Conclusion No 2

- En inspectant les différents aspects du fonctionnement du drone, on ne trouve qu'un seul item (l'advection d'espèces) du cours sur les *Équations macroscopiques de la physique classique* qui n'y participe pas.
- À y bien réfléchir, on trouve aussi qu'il serait intéressant d'approfondir les questions liées à l'aérodynamique au delà des éléments fournis par la leçon ; typiquement utiliser la méthode des éléments de pales (blade element methode).

Bibliographie

1. Le site de Mecaflux – Héliciel donne des renseignements intéressants :

<https://www.heliciel.com/helice/calcul-helice-aile/historique%20methodes%20de%20calculs%20des%20helices.htm>

2. Un livre très complet est disponible au centre de documentation : J.G. Gordon, *Principles of Helicopter aerodynamics*, Camb. Univ. Press., 2006
3. Des thèses et mémoires sur les drones, par exemple

- ▶ Marcus Greiff, "Modelling and Control of the Crazyflie Quadrotor for Aggressive and Autonomous Flight by Optical Flow Driven State Estimation", Lund University, 2017.

<http://lup.lub.lu.se/student-papers/record/8905295/file/8905299.pdf>

- ▶ Nicolas Ahotte, "Conception, optimisation et dimensionnement d'un micromoteur planaires à aimants permanents pour drones miniatures en vol stationnaire", Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2005

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00011517>

Données pour le drone Parrot Mambo

- ▶ Donnée mesurées ou reprises de la littérature

Poids (g)	1 moteur	batterie	m	
	5	17	70	
Dimensions (cm)	a	α	β	γ
	8.5	6.7	3.3	1.8
				R
				3.3
Moteur	\mathcal{R} (Ω)	Φ (Wb)		
	1	à faire		
Coefficients physiques	ρ (kg/m^3)	ν $\mu Pa s$	$g m^2/s$	
	1.117	18.5	9.81	
Hélice	k kgm	k' kgm^2	δ m	
	à faire			
Traînée	C_x			
	à faire			

Essais à faire

- ▶ Φ : mesure de la tension en entraînant le moteur à une vitesse connue.
- ▶ \mathcal{I} : mesure d'oscillations du drone.
- ▶ k, k', δ : banc d'essai avec un moteur seul.
- ▶ Cx : essai en soufflerie.
- ▶ S, S', λ : essais sur le drone complet par examen du vol (film) croisés avec les résultats de simulation.