Équations macroscopiques de la physique classique

Advection-Diffusion

G. Vinsard

Gerard.Vinsard@univ-lorraine.fr
https://gerard.vinsard.fr

19 septembre 2018

Objectifs de la leçon

- Exprimer le cadre formel de l'équation d'advection diffusion

L'équation d'advection-diffusion

- Une densité ρ représente une quantité (unité $\mathcal{U}$) répartie dans un liquide occupant le domaine D et en mouvement avec un champ de vitesses $\vec{v}$ qui est tel que $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ sur ∂D, le bord de D, $\vec{n}$ étant le champ de normales extérieures.

- Les deux phénomènes, advection et diffusion, se décrivent séparemment l'un de l'autre par :
  - l'introduction d'un flux de quantité, $\rho\, \vec{v}$ pour l'advection et $-\alpha\, \vec{\nabla}\rho$ pour la diffusion (α la diffusivité)
  - l'expression de la conservation de la quantité comme $\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{\text{flux}} = 0$

- Le cumul fournit alors

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho\, \vec{v}) - \vec{\nabla} \cdot (\alpha \vec{\nabla} \rho) = 0$$

qui est l'équation d'advection-diffusion.

Condition aux limites de Dirichlet

- Le bord ∂D peut être séparé en deux parties

$$\partial D = \partial D_D + \partial D_{NR}$$

de manière à mettre une condition aux limites de Dirichlet sur ∂D_D et de Neumann et/ou Robin sur ∂D_{NR}. On convient que chacune des parties Dirichlet et Neumann-Robin peut être vide.

- Une condition aux limites de Dirichlet s'écrit

$$\forall \vec{x} \in \partial D_D \ : \ \rho(t, \vec{x}) = \rho_\partial(t, \vec{x})$$

pour indiquer que si $\vec{x} \in \partial D_D$ alors ρ à cette position prend la valeur à cette même position d'une fonction

$$\rho_\partial \quad : \quad \mathbb{R} \times \partial D_D \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}(\mathfrak{U}/m^3)$$

dont le support est ∂D_D (pas D). Plus brièvement, en conférant à ρ et ρ_∂ le statut de variables dépendantes des variables indépendantes $\vec{x}$ et t, on écrit

$$\rho = \rho_\partial \ \text{ sur } \partial D_D$$

Condition aux limites de Neumann et/ou Robin

- Puisque le flux advectif est nul (du fait que $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ sur ∂D et donc sur ∂D_{NR}), la seule partie du flux sortant de D par ∂D_{NR} est diffusive ; c'est

$$-\alpha\, \vec{\nabla}\rho \cdot \vec{n}$$

- Une condition aux limites de Neumann et/ou Robin consiste à écrire (en abrégé) sur ce flux la relation

$$-\alpha\, \vec{\nabla}\rho \cdot \vec{n} = \Phi_\partial + h\, \rho \;\text{ sur } \partial D_{NR}$$

où

$$\begin{array}{rcccl} \Phi_\partial & : & \mathbb{R} \times \partial D_{NR} & \longrightarrow & \mathbb{R}(\mathfrak{U}/(m^2\, s)) \\ h & : & \mathbb{R} \times \partial D_{NR} & \longrightarrow & \mathbb{R}(\mathfrak{U}\, m/s) \end{array}$$

sont des fonctions données. Une abréviation supplémentaire consiste à noter $\vec{\nabla}\rho \cdot \vec{n}$ par $\frac{\partial \rho}{\partial n}$ ou plus court encore $\partial_n \rho$; ainsi la condition s'écrit

$$-\alpha\, \partial_n \rho = \Phi_\partial + h\, \rho \;\text{ sur } \partial D_{NR}$$

Source et puits

- Si de plus cette production ou consommation est répartie dans le domaine D avec une densité de production ou consommation

$$\begin{array}{cccc} \theta & : & \mathbb{R} \times E_3 & \longrightarrow & \mathbb{R}(\mathfrak{U}/(m^3\ s)) \\ & & (t, \vec{x}) & \longrightarrow & \theta(t, \vec{x}) \end{array}$$

alors

$$\delta\Theta = \int_{\delta D} \theta(t, \vec{x})\ d\vec{x}^3$$

- Pour l'advection et la diffusion cela se traduit par

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho\ \vec{v}) = \theta \text{ et } \partial_t \rho - \vec{\nabla} \cdot (\alpha \vec{\nabla} \rho) = \theta$$

ce sont les équations d'advection et diffusion avec source (ou puits).

- Un exemple de telle source ou puits est fourni par les réactions chimiques qui peuvent consommer ou produire des quantités ; mais le développement de l'exemple demande de considérer les mécanismes d'activation de ces réactions chimiques, ce qui introduit des complications qu'il serait prématuré de considérer.

Le système au complet

- Un problème complet consiste en la recherche de ρ solution de

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \vec{\nabla}\cdot(\rho\ \vec{v}) - \vec{\nabla}\cdot(\alpha\ \vec{\nabla}\rho) = \theta & \text{dans } D \\ \rho(t=0,\vec{x}) = \rho_0(\vec{x}) & \text{dans } D \\ \rho = \rho_\partial & \text{sur } \partial D_D \\ -\alpha\ \partial_n \rho = \Phi_\partial + h\ \rho & \text{sur } \partial D_{NR} \end{cases}$$

où les fonctions de support D

$$\begin{array}{ccccccccccc} \alpha & : & E_3 & \longrightarrow & \mathbb{R}(m^2/s) & ; & \rho_0 & : & E_3 & \longrightarrow & \mathbb{R}(\mathfrak{U}/m^3) \\ \vec{v} & : & E_3 & \longrightarrow & E_3(m/s) & ; & \theta & : & E_3 & \longrightarrow & \mathbb{R}(\mathfrak{U}/(m^3\ s)) \end{array}$$

et celles de support ∂D_D ou ∂D_{NR} ($\partial D = \partial D_D + \partial D_{NR}$)

$$\begin{array}{cccc} \Phi_\partial & : & \mathbb{R}\times\partial D_{NR} & \longrightarrow & \mathbb{R}(\mathfrak{U}/(m^2\ s)) \\ h & : & \mathbb{R}\times\partial D_{NR} & \longrightarrow & \mathbb{R}(\mathfrak{U}\ m/s) \\ \rho_\partial & : & \mathbb{R}\times\partial D_D & \longrightarrow & \mathbb{R}(\mathfrak{U}/m^3) \end{array}$$

sont des données.

Mathématique et physique

- Les questions mathématiques sont
  1. connaître les propriétés minimales que doivent posséder les données pour qu'il existe une solution unique au système complet ;
  2. ces propriétés étant avérées, identifier des méthodes permettant la résolution effective.

- Les questions physiques et techniques sont
  1. identifier les situations qui relèvent de ce système ;
  2. utiliser les solutions du système pour prévoir l'évolution de ces situations.

Il y a *a priori* complémentarité entre les deux approches...

Le problème stationnaire

- Le régime stationnaire est celui qui est atteint quand la solution ne dépend plus du temps. Reste à savoir si ce régime stationnaire existe.
- S'il existe alors la densité atteinte est
$\rho_\infty \quad : \quad E_3 \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}(\mathfrak{U}/m^3)$ solution de

$$\left\{\begin{array}{ll} \vec{\nabla}\cdot(\rho_\infty\ \vec{v}) - \vec{\nabla}\cdot(\alpha\ \vec{\nabla}\rho_\infty) = \theta & \text{dans } D \\ \rho_\infty = \rho_\partial & \text{sur } \partial D_D \\ -\alpha\ \partial_n\rho_\infty = \Phi_\partial + h\ \rho_\infty & \text{sur } \partial D_{NR} \end{array}\right.$$

ce qui suppose dejà que α, θ, $\vec{v}$, ρ_∂, Φ_∂ et h ne dépendent pas du temps.
- Ensuite en introduisant $\rho_T = \rho - \rho_\infty$ solution de

$$\left\{\begin{array}{ll} \partial_t\rho_T + \vec{\nabla}\cdot(\rho_T\ \vec{v}) - \vec{\nabla}\cdot(\alpha\ \vec{\nabla}\rho_T) = 0 & \text{dans } D \\ \rho_T(t=0,\vec{x}) = \rho_0(\vec{x}) - \rho_\infty(\vec{x}) & \text{dans } D \\ \rho_T = 0 & \text{sur } \partial D_D \\ -\alpha\ \partial_n\rho_T = h\ \rho_T & \text{sur } \partial D_{NR} \end{array}\right.$$

il faut que $\lim_{t\longrightarrow\infty}\rho_T = 0$.

Le problème stationnaire

- Le résultat se montre en multipliant par ρ_T l'équation de volume

$$\partial_t \rho_T + \vec{\nabla} \cdot (\rho_T \ \vec{v}) - \vec{\nabla} \cdot (\alpha \ \vec{\nabla} \rho_T) = 0 \text{ dans } D$$

cela donne (après avoir un peu arrangé les termes avec les formules d'analyse vectorielle)

$$\partial_t \left(\frac{\rho_T^2}{2} \right) + \vec{\nabla} \cdot (\rho_T^2 \ \vec{v}) - \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\rho_T^2}{2} \ \vec{v} \right) + \frac{\rho_T^2}{2} \ \vec{\nabla} \cdot \vec{v} - \vec{\nabla} \cdot \left(\alpha \ \vec{\nabla} \left(\frac{\rho_T^2}{2} \right) \right)$$
$$+\alpha \ \left(\vec{\nabla} \rho_T \right)^2 = 0$$

- L'intégration sur D de cette relation fournit alors

$$\frac{d}{dt} \int_D \frac{\rho_T^2}{2} \ d\vec{x}^2 = - \int_{\partial D_{NR}} h \ \rho_T^2 \ d\vec{x}^2 - \int_D \alpha \ \left(\vec{\nabla} \rho_T \right)^2 - \int_D \frac{\rho_T^2}{2} \ \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \ d\vec{x}^2$$

où on voit que si $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$, $\alpha > 0$, $h > 0$, la grandeur positive $\int_D \frac{\rho_T^2}{2} \ d\vec{x}^2$ est décroissante dès lors que ρ_T n'est pas nul. On conclut que ρ_T finit par s'annuler.

Conduction

- Si $\vec{v} = \vec{0}$ dans D, le problème stationnaire ($\alpha > 0$ et $h > 0$)

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot (\alpha \, \vec{\nabla} \rho_\infty) + \theta = 0 & \text{dans } D \\ \rho_\infty = \rho_\partial & \text{sur } \partial D_D \\ -\alpha \, \partial_n \rho_\infty = \Phi_\partial + h \, \rho_\infty & \text{sur } \partial D_{NR} \end{cases}$$

s'appelle un problème de conduction.

- Si α est uniforme, ce problème peut se réécrire

$$\begin{cases} \Delta \rho_\infty + \theta/\alpha = 0 & \text{dans } D \\ \rho_\infty = \rho_\partial & \text{sur } \partial D_D \\ -\partial_n \rho_\infty = \Phi_\partial/\alpha + h/\alpha \, \rho_\infty & \text{sur } \partial D_{NR} \end{cases}$$

où $\Delta \rho_\infty = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \rho_\infty)$ est le laplacien. Le problème s'appelle alors un problème de Poisson, si $\theta = 0$ c'est un problème de Laplace.

- Les problèmes de conduction n'ont pas nécessairement de solutions analytiques mais les solutions numériques ne sont pas difficiles à obtenir.

Advection et diffusion stationnaire

- Le problème d'advection-diffusion stationnaire consiste à chercher ρ_∞ solution de (avec $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ sur ∂D)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{\nabla} \cdot (\alpha \, \vec{\nabla} \rho_\infty) - \vec{\nabla} \cdot (\rho_\infty \, \vec{v}) + \theta = 0 & \text{dans } D \\ \rho_\infty = \rho_\partial & \text{sur } \partial D_D \\ -\alpha \, \partial_n \rho_\infty = \Phi_\partial + h \, \rho_\infty & \text{sur } \partial D_{NR} \end{array} \right.$$

- Il est intéressant de connaître la solution d'un problème unidirectionel particulier, soit

$$D = \{z \, \vec{k}_z + r \, \vec{k}_r\} \text{ pour } 0 < z < L \text{ et } 0 < r < R$$

dans le cas où

$$\begin{array}{l} \partial D_D = \partial D_0 + \partial D_L \text{ avec } D_0, D_L \text{ les bases du cylindre} \\ \partial D_0 = \{r \, \vec{k}_r\} \text{ et } \partial D_L = \{r \, \vec{k}_r + L \, \vec{k}_z\} \text{ pour } 0 < r < R \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \rho_\infty = \rho_0 \text{ et } \rho_L \text{ (uniformes) sur } \partial D_0 \text{ et } \rho_L \\ h = 0, \Phi_\partial = 0 \;\text{ sur } \partial D_l = \{R \, \vec{k}_r\} \text{ le bord latéral } \subset \partial D_{NR} \end{array}$$

et finalement pour α uniforme, $\theta = 0$ et $\vec{v} = v \, \vec{k}_z$

Advection et diffusion stationnaire sans le cas 1D

- Dans ce cas, ρ_∞ ne dépend ni de x, ni de y et donc l'équation d'advection-diffusion se réduit à

$$\alpha \frac{d\rho_\infty}{dz^2} - v\ \frac{d\rho_\infty}{dz} = 0$$

dont la solution est

$$\rho_\infty = \rho_0\ \frac{\exp^{L/\delta} - \exp^{z/\delta}}{\exp^{L/\delta} - 1} + \rho_L\ \frac{\exp^{z/\delta} - 1}{\exp^{L/\delta} - 1}\ \text{ avec } \delta = \frac{\alpha}{v}$$

- δ est à comparer avec L : si $\delta >> L$, alors

$$\text{pour } 0 < z < L\ :\ \rho_\infty \approx \rho_0\ \frac{L - z}{L} b + \rho_L\ \frac{z}{L}$$

qui est la solution pour $v = 0$: c'est la conduction qui domine.
Si, au contraire $L >> \delta$, la solution est

$$\rho_\infty \approx \rho_0 + (\rho_L - \rho_0) \exp^{(z-L)/\delta}\ \ (\rho_\infty \approx \rho_0 \text{ si } z < L - \delta)$$

c'est l'advection qui domine.

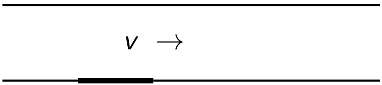
Nombre de Peclet

- Le cas 1D met en évidence l'importance du facteur $\dfrac{L}{\delta} = \dfrac{L\ v}{\alpha}$
- Cette importance demeure dans les autres cas, aussi introduit-on le nombre de Peclet
$$Pe = \frac{L\ |\vec{v}|}{\alpha}$$
où L est une longueur un peu mystérieuse qu'on appelle la « dimension caractéristique » et qui représente l'ordre de grandeur des longueurs dans le domaine D. Si ce nombre est supérieur à 1, l'advection domine, s'il est très inférieur à 1 c'est la conduction qui domine.
- Comme α et $\vec{v}$ varient *a priori* dans D il peut y avoir des zones de D où l'advection domine alors que ce sera la conduction dans d'autres.

- On voit donc qu'il est possible de construire des situations où la considération des valeurs du nombre de Peclet pose plus de problèmes qu'elle n'en résout ; mais dans les situations simples ces considérations peuvent être utiles.

Exercice : Advection-Diffusion

De l'eau pure circule dans une conduite à une vitesse v constante, elle est mise en contact avec du sel solide dans une partie de la conduite (en gras sur le dessin)



- Dans l'approximation 2D (géométrie cylindrique par rapport à la direction transverse au plan de la feuille) faire une figure comportant des noms de domaines et de bords de domaines et écrire les équations du problème d'évolution de la concentration en spécifiant toutes les variables utilisées.

Pour les illustrations, cf. script FreeFem++
`https://gerard.vinsard.fr/Cours/EMPC/L2Conduite.edp`

Équation de sédimentation

- L'équation de sédimentation modélise le dépot de particules dans un milieu par ailleurs immobile, elle a la forme d'une équation d'advection-diffusion, soit dans un domaine D donné

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \; \vec{v}) - \vec{\nabla} \cdot (\alpha \; \vec{\nabla} \rho) = \theta$$

où ρ est la concentration de particules, α la diffusivité de celles-ci, θ un terme de production (ou consommation) volumique des particules.

- $\vec{v}$ n'est par contre pas une vraie vitesse mais plutôt une vitesse moyenne obtenue par des considérations sur les forces qui s'exercent sur les particules. Si ces forces sont celles de la pesanteur de champ $-g \; \vec{k}_z$,

$$\vec{v} = -s \; g \; \vec{k}_z$$

où s est un coefficient appelé le coefficient de sédimentation.
- Le coefficient s peut être obtenu par des considérations théoriques qui ne seront pas développées dans cette leçon.

Équation de sédimentation

- Cette vitesse $\vec{v}$ n'a pas la propriété qui a été utilisée jusqu'ici que $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ sur ∂D ; aussi les conditions aux limites de type Neumann-Robin sont-elle modifiées pour prendre en compte que le flux de particules est à la fois diffusif et advectif. La condition d'imperméabilité d'une paroi ∂D_{NR} d'écrit

$$-\alpha \partial_n \rho + \rho \, \vec{v} \cdot \vec{n} = 0$$

et ce sera la seule condition utilisée ici, avec cependant également celle de Dirichlet

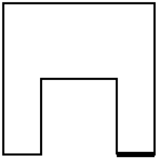
$$\rho = \rho_\partial \text{ sur } \partial D_D$$

pour prendre en compte le fait qu'on peut connaître la concentration de particules en certain endroits.

- L'équation de sédimentation mériterait plus de développements, mais on l'introduit ici juste pour donner des exemples simples d'équation d'advection-diffusion.

Exercice : Sédimentation

Un papier essuie-tout (placé entre deux feuilles de plastique pour éviter l'évaporation latérale) est disposé comme indiqué sur la photographie ;



$g \downarrow$

► En supposant que la concentration en eau peut être modélisée par une équation de sédimentation, faire une figure comportant des noms de domaines et de bords de domaines et écrire les équations du problème d'évolution de la concentration en spécifiant toutes les variables utilisées.

Pour les illustrations, cf. script FreeFem++
`https://gerard.vinsard.fr/Cours/EMPC/L2Sedimentation.edp`