Équations macroscopiques de la physique classique

Advection

G. Vinsard

Gerard.Vinsard@univ-lorraine.fr
https://gerard.vinsard.fr

28 août 2019

Objectifs de la leçon

- Introduire l'équation d'advection de quantités ;

Champ de vitesses dans un domaine D

- Un champ de vitesses dans un domaine D est une application

$$\vec{v} \quad : \quad \mathbb{R} \times D \quad \longrightarrow \quad E_3(m/s)$$

où $E_3(m/s)$ désigne l'espace des vecteurs de E_3 dont la longueur n'est plus un mètre mais un mètre par seconde.

- Ce champ de vitesses advecte les particules matérielles qui se situent initialement aux positions $\vec{x} \in D$; celles-ci se retrouvent à l'instant t aux positions $\vec{X}(t)$ solutions de

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{v}(t, \vec{X}) \; ; \; \vec{X}(t=0) = \vec{x}$$

- Pour que les particules ne sortent pas du domaine D il faut que le champ de vitesses n'ait pas de composante normale à sa frontière, soit

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \partial D$$

Flot du champ de vitesses

- L'application flot du champ de vitesses est

$$\begin{array}{rcccl} \vec{\Psi} & : & \mathbb{R} \times E_3 & \longrightarrow & E_3 \\ & & (t, \vec{x}) & \longrightarrow & \vec{\Psi}(t, \vec{x}) = \vec{X}(t) \end{array}$$

où $\vec{X}$ est solution de $d\vec{X}/dt = \vec{v}(t, \vec{X})$ avec $\vec{X}(t = 0) = \vec{x}$ et donc nécessairement $\vec{\Psi}(t = 0, \vec{x}) = \vec{x}$

- Les positions définies par $\vec{\Psi}(t, \vec{x})$ lorsque t varie constituent la trajectoire d'une particule qui serait entraînée par le champ de vitesses $\vec{v}$ et qui serait à la position $\vec{x}$ en $t = 0$ (initialement).

- Le vecteur vitesse de cette particule est, à l'intant t, $\partial_t \vec{\Psi}(t, \vec{x})$

- Et c'est aussi le vecteur vitesse à l'intant t et à la position $\vec{\Psi}(t, \vec{x})$, d'où la relation

$$\partial_t \vec{\Psi}(t, \vec{x}) = \vec{v}(t, \vec{\Psi}(t, \vec{x}))$$

Densité volumique

- La densité d'une quantité d'unité $\mathfrak{U}$ est définie sur D par

$$\rho \quad : \quad \mathbb{R} \times D \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}(\mathfrak{U}/m^3)$$

où $\mathbb{R}(\mathfrak{U}/m^3)$ désigne les nombres réels dont l'unité physique est le rapport de l'unité $\mathfrak{U}$ de la quantité par l'unité de volume m^3

- Si $\delta D \subset D$ est un sous-domaine de D (pas nécessairement infinitésimal pour l'instant), la quantité δQ contenue dans δD à l'instant t est

$$\delta Q = \int_{\delta D} \rho(t, \vec{x}) \, d\vec{x}^3$$

où l'élément de volume est noté $d\vec{x}^3$

- La variation par rapport au temps de cette quantité est

$$\frac{d\delta Q}{dt} = \int_{\delta D} \partial_t \rho(t, \vec{x}) \, d\vec{x}^3$$

Flux advectif

- Si la densité précédente évolue sous l'action d'un champ de vitesses $\vec{v}$, le flux advectif est un champ de vecteurs

$$\begin{array}{rcccl} \vec{\Phi} & : & \mathbb{R} \times E_3 & \longrightarrow & E_3(\mathfrak{U}/(m^2\ s)) \\ & & (t, \vec{x}) & \longrightarrow & \vec{\Phi}(t, \vec{x}) = \rho(t, \vec{x})\ \vec{v}(t, \vec{x}) \end{array}$$

où $E_3(\mathfrak{U})/(m^2\ s)$ désigne les vecteurs de E_3 dont la longueur est d'unité physique $\mathfrak{U}/(m^2\ s)$

- Si δS est une surface intérieure à D (pas nécessairement infinitésimale pour l'instant) et que cette surface est dotée d'un champ de normale

$$\begin{array}{rcccl} \vec{n} & : & \delta S & \longrightarrow & E_3(1) \\ & & \vec{x} & \longrightarrow & \vec{n}(\vec{x}) \end{array}$$

la quantité qui traverse δS par seconde est

$$\int_{\delta S} \vec{\Phi}(t, \vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x})\ d\vec{x}^2 = \int_{\delta S} \rho(t, \vec{x})\ \vec{v}(t, \vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x})\ d\vec{x}^2$$

où l'élément de surface est noté $d\vec{x}^2$

Conservation de quantité

- La surface δS précédente est maintenant le bord du sous-domaine δD, la quantité qui traverse ce bord par seconde est donc

$$\int_{\partial\delta D} \rho(t,\vec{x})\, \vec{v}(t,\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x})\, d\vec{x}^2$$

et, si la normale est orientée vers l'extérieur de δD, c'est la quantité qui sort de D.

- Comme d'autre part la variation par unité de temps de la quantité contenue par D est

$$\frac{d\delta Q}{dt} = \int_{\delta D} \partial_t \rho(t,\vec{x})\, d\vec{x}^3$$

il reste à exprimer que ces deux grandeurs sont liées, soit

$$\int_{\delta D} \partial_t \rho(t,\vec{x})\, d\vec{x}^3 + \int_{\partial\delta D} \rho(t,\vec{x})\, \vec{v}(t,\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x})\, d\vec{x}^2 = 0$$

Équation d'advection

- Le théorème de Green-Ostrogradki affime que pour un champ de vecteurs différentiable quelconque

$$\int_{\delta D} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}\, d\vec{x}^3 = \int_{\partial \delta D} \vec{u} \cdot \vec{n}\, d\vec{x}^2$$

où $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$ est la divergence de $\vec{u}$.

- Son application à $\vec{u} = \vec{\Phi}$ dans l'équation de conservation de quantité conduit alors à

$$\int_{\delta D} \partial_t \rho \, d\vec{x}^3 + \int_{\delta D} \vec{\nabla} \cdot (\rho \, \vec{v}) \, d\vec{x}^3 = \int_{\delta D} \left(\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \, \vec{v}) \right) \, d\vec{x}^3 = 0$$

- Comme ce résultat est valable pour n'importe quel domaine δD, il faut qu'en toute position

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \, \vec{v}) = 0$$

C'est l'équation d'advection.

Advection stationnaire

► Un champ de vitesses $\vec{v}$ étant donné, le problème d'advection stationnaire consiste à chercher ρ_∞ solution de

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho_\infty\ \vec{v}) = 0 \ \text{ dans } D \text{ compte tenu que } \vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \partial D$$

► Si de plus $\vec{v}$ a la propriété d'être à divergence nulle ($\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$) le problème se ramène alors à la recherche de ρ_∞ tel que

$$\vec{\nabla}\rho_\infty \cdot \vec{v} = 0$$

soit celui des surfaces définies par les positions $\vec{x}$ telles que

$$\rho_\infty(\vec{x}) = \text{Constante}$$

dont la normale est orthogonale au champ de vecteurs $\vec{v}$, c'est à dire *in fine* aux « tubes de courant » de ce champ de vecteur. C'est donc géométriquement clair

► Les problèmes d'advection stationnaires sont des problèmes de géométrie différentielle qui ont cependant l'inconvénient de ne pas être si faciles à résoudre.

Advection instationnaire pour un champ de vitesses à divergence nulle

- Le problème d'advection instationnaire consiste à chercher ρ solution de

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \, \vec{v}) = 0 \; ; \; \rho(t=0, \vec{x}) = \rho_0(\vec{x}) \quad \text{dans } D$$

compte tenu que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \;\; \text{dans } D \; ; \; \vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \partial D$$

- Si $\vec{v}$ est lui-même stationnaire,

$$\partial_t \vec{v} = \vec{0}$$

sa résolution peut permettre de fournir à la limite $t \longrightarrow \infty$ la solution du problème stationnaire mais ce n'est pas assuré comme le montre la planche suivante.

Advection instationnaire : illustration

- Si le champ de vitesses est de la forme

$$\vec{v} = \vec{k}_\theta \left\{ \begin{array}{ll} r\,\omega & \text{si } r < R \\ R^2\,\omega/r & \text{sinon} \end{array} \right. \quad \text{où} \quad \left| \begin{array}{l} \vec{k}_\theta = -\sin\theta\ \vec{k}_x + \cos\theta\ \vec{k}_y \\ x = r\ \cos\theta\ ;\ y = r\ \sin\theta \end{array} \right.$$

et que la densité initiale est

$$\rho_0 = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$$

alors la ligne séparant les zones $\rho = 1$ et $\rho = 0$ est située à l'instant t en $X\ \vec{k}_x + Y\ \vec{k}_y$ où X et Y sont paramétrés par $y \in \mathbb{R}$ comme

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \text{si } |y| < 0 \begin{pmatrix} -y\ \sin(\omega\ t) \\ y\ \cos(\omega\ t) \end{pmatrix} \text{ sinon } \begin{pmatrix} -y\ \sin\left(R^2/y^2\ \omega\ t\right) \\ y\ \cos\left(R^2/y^2\ \omega\ t\right) \end{pmatrix}$$

c'est à dire, dans la zone $r > R$, par une spirale d'équation polaire $\theta = \omega t\ R^2/r^2$ (cf. script `https://gerard.vinsard.fr/Cours/EMPC/L2advection.wxm`).
Lorsque ωt devient grand les valeurs 0 et 1 alternent rapidement dans le sens des rayons croissants.

Exercices : Évolution de taches dans des champs de vitesses bidimensionnels

- Comment évolue une tache initialement carrée dans un champ de vitesses de cisaillement, i.e. de la forme $\vec{v} = -\Omega\, y\, \vec{k}_x$?

- Et une tache initialement ronde ou même de forme quelconque paramétrée par $G(x, y) < 0$?

- Le champ de vitesses est de la forme $\vec{v} = \partial_y a\, \vec{k}_x - \partial_x a\, \vec{k}_y$ où $a = V\,(y - g(x))$, g étant une fonction quelconque. Mêmes questions.

Exercices : Évolution de taches dans des champs de vitesses bidimensionnels

- Mêmes questions encore pour un champ de vitesses dipolaire-2D, i.e., en coordonnées cylindriques, de la forme

$$\vec{v}(r,\theta) = V \begin{cases} (\sin\theta\ \vec{k}_r + \cos\theta\ \vec{k}_\theta) & \text{pour } r < \mathcal{R} \\ (\sin\theta\ \vec{k}_r - \cos\theta\ \vec{k}_\theta)\ \mathcal{R}^2/r^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ind. Une intégrale première de $\frac{d}{dt}\left(R\ \left(\cos\Theta\ \vec{k}_x + \sin\Theta\ \vec{k}_y\right)\right) = \vec{v}(R,\Theta)$ est

$$a(R,\Theta) = \text{Cste avec } a(R,\Theta) = V \begin{cases} -\cos\Theta\ R & \text{pour } r < \mathcal{R} \\ -\cos\Theta\ \mathcal{R}^2/R & \text{sinon} \end{cases}$$

On se contentera de tracer le portrait de phase du système d'EDO et d'exprimer la quadrature qui permet d'obtenir son intégration exacte. À partir de quoi on pourra estimer qualitativement le mouvement d'une tache ronde initialement de diamètre $D < 2\,\mathcal{R}$ et centrée sur l'origine.