

Éléments de base du génie électrique



Leçon 1



Circuits électriques monophasé et triphasé

G. Vinsard

Gerard.Vinsard@univ-lorraine.fr

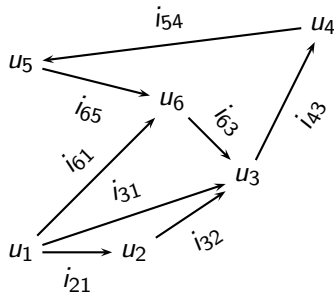
4 février 2016

Objectifs de la leçon

- ▶ Rappeler les éléments de culture commune sur les circuits électriques ;
- ▶ Faire apparaître (sans insister) qu'il existe des développements possibles de ces éléments ;
- ▶ Passer au régime monophasé équilibré en insistant sur les puissances électriques ;
- ▶ Introduire le triphasé équilibré ;
- ▶ Rappeler/introduire le couplage inductif.

Le circuit électrique est un graphe

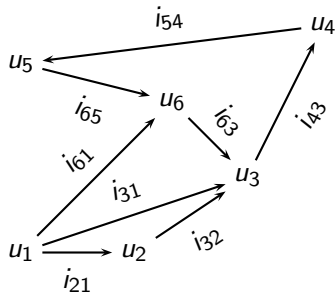
► un circuit électrique est un graphe¹ aux nœuds duquel sont attachés des valeurs de potentiel électrique et dont les arêtes sont parcourues par des courants électriques.



les nœuds sont numérotés de 1 à 6 ; les valeurs de potentiels u_n sont nommés par le symbole u indicé par les numéros de nœuds ; les valeurs de courant sont nommés par le symbole i double indicé par, dans l'ordre, le numéro de nœud vers lequel est dirigé le courant et le numéro de nœud d'où provient ce courant.

1. La notion sera précisée dans le cours *ad hoc*.

Le circuit électrique est un graphe



Les « courants incidents à un nœud donné » sont les courants dirigés vers ce nœud mais aussi ceux dont il est la provenance, mais alors dans ce dernier cas ils sont compté négativement. Par exemple les courants incidents au nœud No 3 sont : i_{32} , i_{31} , i_{63} et $-i_{43}$. La « tension entre bornes » ou « différence de potentiels » est

$$V_{nm} = U_n - U_m$$

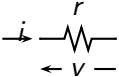
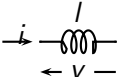
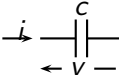
Lois de Kirchoff

- ▶ La somme des courants incidents à un noeud du circuit électrique est nulle (loi aux nœuds) ;
- ▶ la somme des tensions aux bornes des arêtes le long d'un parcours fermé sur le circuit (une maille) est nulle (loi aux mailles).

La considération des potentiels aux nœud plutôt que celle des différences de potentielles permet de satisfaire automatiquement la 2^e loi de Kirchoff. Mais les relations entre tension et courant apparaissent entre différence de potentiels et courant sur les arêtes. De plus la loi aux nœud reste à satisfaire.

- ▶ Un chapitre de la théorie des graphes a pour utilité de fournir des méthodes automatiques de paramétrisation des courants pour satisfaire la loi aux nœuds. Cette question ne sera pas traitée ici.

Idéographie des composants électriques passifs

composant	coefficient	Unité	symbole	relation
résistance	résistance	Ω (Ohm)		$v = r i$
autoinductance	inductance	H (Henry)		$v = \frac{d\varphi}{dt}$ avec $\varphi = L i$
condensateur	capacité	F (Farad)		$i = \frac{dq}{dt}$ avec $q = C v$

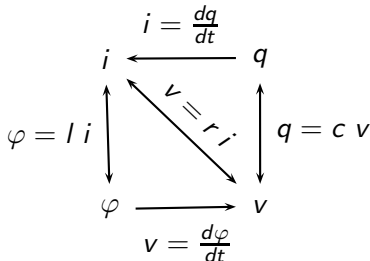
Deux quantités intermédiaires ont été introduites :

- ▶ le « flux magnétique » φ dont l'unité est le Weber (Wb)
- ▶ la « charge électrique » q dont l'unité est le Coulomb (Cb).

L'unité de la « différence de potentiel » abrégée en « tension » v est le Volt (V) et celle du courant électrique l'Ampère (A)

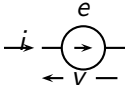
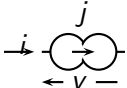
Diagramme de Chua²

- Les relations linéaires (incluant l'opération de dérivation par rapport au temps) entre le courant et la tension sont figurées par les relations correspondant aux composants passifs.
- Il est intéressant de représenter ces relations sous la forme du diagramme



où seul manque une relation directe entre charge électrique q et flux magnétique φ ; cette liaison correspond à un composant imaginé par Chua et créé récemment, appelé memristor et dont l'étude va au delà des objectifs de la leçon.

Idéographie des composants électriques actifs

composant	coefficient	symbole	relation
générateur de tension	tension source		$v = -e$ où e est une donnée
générateur de courant	courant source		$i = j$ où j est une donnée

La tension source peut aussi être appelée une force électromotrice : on remarquera que le choix fait pour la relation entre le sens du courant et de la ddp (convention générateur) est opposée à celui des composants passifs (convention récepteur).

Ces composants actifs sont une idéalisation de circuits électriques³ qui assurent leur fonction globale ; l'étude de ces circuits dépassant les objectifs de la leçon.

3. Sauf pour les batteries qui sont des convertisseurs électrochimiques.

Le régime sinusoïdal établi : sur l'exemple du circuit r/c

- Si i est le courant qui parcourt le circuit et v la tension aux bornes du condensateur :

$$e = ri + l \frac{di}{dt} + v \text{ et } i = c \frac{dv}{dt}$$

- Si $e(t) = \mathcal{E} \cos(\omega t + \phi)$ on note plutôt

$$e(t) = \sqrt{2} \Re \{ \underline{E} \exp^{j \omega t} \}$$

où $j = \sqrt{-1}$ et $\sqrt{2} \underline{E} = \mathcal{E} \exp^{j \phi}$ et où on appelle $E = |\underline{E}|$ la « valeur efficace » et $\underline{E}$ l'amplitude complexe de la tension $e(t)$ et $\Re\{\}$ est la *partie réelle* de son argument.

- De cette façon la solution de régime établi (régime forcé) s'écrit

$$i(t) = \sqrt{2} \Re \{ \underline{I} \exp^{j \omega t} \} \text{ et } v(t) = \sqrt{2} \Re \{ \underline{V} \exp^{j \omega t} \}$$

où $\underline{I}$ et $\underline{V}$ sont solutions de

$$\underline{E} = (r + j l \omega) \underline{I} + \underline{V} \text{ et } \underline{I} = j c \omega \underline{V}$$

Les puissances (en régime établi) aux bornes d'un dipole

- Si e et i sont les *tensions aux bornes* et courant dans le dipole, la puissance instantanée est

$$\underbrace{p(t)}_{\text{puissance instantanée}} = e(t) i(t)$$

elle se décompose en deux termes

$$p(t) = \underbrace{\Re\{\underline{E} \underline{I}^*\}}_{\text{puissance active notée } P} + \underbrace{\Re\{\underline{E} \underline{I} \exp^{2j\omega t}\}}_{\text{puissance fluctuante}}$$

- Et deux autres puissance s'introduisent qui sont

$$\underbrace{S = |\underline{E}| |\underline{I}|}_{\text{puissance apparente}} \quad \text{et} \quad \underbrace{Q = \Im\{\underline{E} \underline{I}^*\}}_{\text{puissance réactive}}$$

avec lesquelles on peut écrire

$$S^2 = P^2 + Q^2$$

Les puissances : sur l'exemple du circuit *rlc*

- Dans ce cas du circuit *rlc*, la *puissance apparente complexe* $\underline{S} = P + j Q$ est

$$\underline{S} = \left(r + j l \omega + \frac{1}{j c \omega} \right) |\underline{I}|^2 = \frac{\left(r - j \left(l \omega - \frac{1}{c \omega} \right) \right)}{r^2 + \left(l \omega - \frac{1}{c \omega} \right)^2} |\underline{E}|^2$$

- d'où
- si $r = 0$ la puissance active que doit fournir la source est nulle ;
 - si $l \rightarrow 0$ et $c \rightarrow \infty$ la puissance réactive que doit fournir la source est nulle ;
 - si $l c \omega^2 = 1$ la puissance réactive que doit fournir la source est nulle ; c'est la condition de résonance ;

Circuit monophasé

- Un circuit monophasé est un circuit électrique dans lequel la ou les sources dépendent sinusoïdalement du temps et dans lequel on ne s'intéresse qu'au régime établi.
- La notation complexe

$$u(t) = \sqrt{2} \Re\{\underline{U} \exp^{j\omega t}\}$$

est systématiquement utilisée et ainsi les relations différentielles deviennent algébriques.

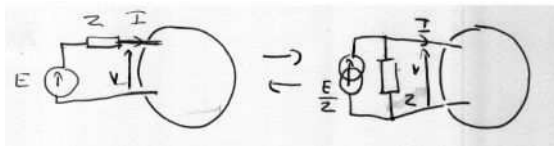
- Cela permet d'introduire la notion d'impédance qui consiste à sommer toutes les contributions (réelles et imaginaires) des composants en série afin de les regrouper en un seul coefficient complexe. Pour le circuit r/c

$$\underline{E} = Z \underline{I} \text{ avec } Z = r + j\left(l\omega - \frac{1}{c\omega}\right)$$

Idéographie et résolution de circuit

► Les résolutions de problèmes de circuit électrique en régime sinusoïdal établi sont donc des opérations purement algébriques. Une possibilité souvent utilisée consiste à ne pas écrire ces équations explicitement pour obtenir un système linéaire qu'il faudra inverser mais plutôt à traduire les transformations de ce système directement sur le schéma électrique.

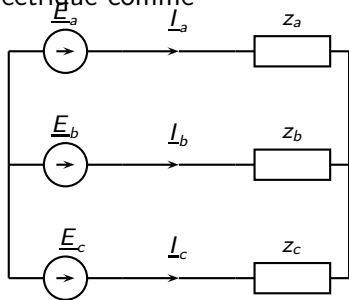
► Par exemple les « théorèmes » de Thévenin et Norton affirment que les tensions et courants V et I de la figure



sont les mêmes qu'on place à gauche un générateur de tension E en série avec un impédance Z ou un générateur de courant E/Z en parallèle avec l'impédance Z .

Circuits triphasés équilibrés

- Un circuit électrique comme



présente une certaine symétrie.

- Si les trois impédances z_a , z_b , z_c de charge sont identiques et que les trois tensions sources $\underline{E}_a$, $\underline{E}_b$, $\underline{E}_c$ sont de la forme

$$\underline{E}_a = \underline{E} \quad ; \quad \underline{E}_b = a^2 \underline{E} \quad ; \quad \underline{E}_c = a \underline{E}$$

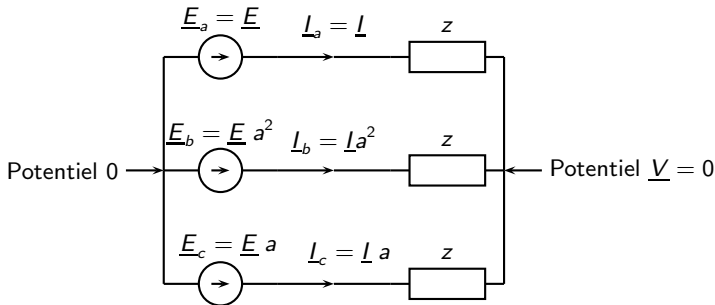
pour a une racine cubique non-réelle de l'unité, par exemple

$$a = \exp^{j 2\pi/3}$$

alors le circuit est un *circuit triphasé équilibré*

Analyse du circuit triphasé équilibré

- Un circuit triphasé équilibré peut être réduit.



- En effet

$$\underline{E}_a = z \underline{I}_a + \underline{V} \quad ; \quad \underline{E}_b = z \underline{I}_b + \underline{V} \quad ; \quad \underline{E}_c = z \underline{I}_c + \underline{V}$$

et donc

$$\underline{E}_a + \underline{E}_b + \underline{E}_c = 0 \implies \underline{V} = 0$$

d'où

$$\underline{I}_a = \underline{E}_a / z \quad ; \quad \underline{I}_b = \underline{E}_b / z \quad ; \quad \underline{I}_c = \underline{E}_c / z$$

Circuit monophasé équivalent

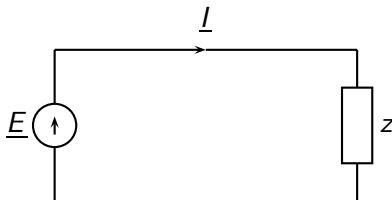
► Si on pose

$$\underline{I}_a = a^0 \underline{I} \quad ; \quad \underline{I}_b = a^2 \underline{I} \quad ; \quad \underline{I}_c = a^1 \underline{I}$$

ces trois relations reviennent à

$$\underline{I} = \underline{E}/z$$

► Un circuit triphasé équilibré comme le précédent se réduit donc au circuit monophasé



Puissances et passage triphasé $\longrightarrow$ monophasé équivalent

- La somme des puissances issues des sources du circuit triphasé équilibré est

$$\underline{S} = P + jQ = \underline{E}_1 \underline{I}_1^* + \underline{E}_2 \underline{I}_2^* + \underline{E}_3 \underline{I}_3^* = 3 \underline{E} \underline{I}^*$$

Et finalement le courant $\underline{I}$ permet d'obtenir la puissance apparente complexe comme

$$\underline{S} = 3 \underline{E} \underline{I}^*$$

- Toutefois il faut noter que la somme des puissances fluctuantes des trois phases est

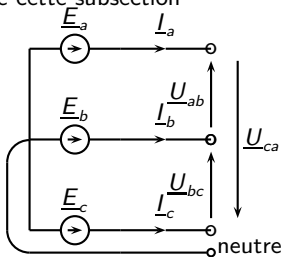
$$\Re\{(a^0 + a^1 + a^2) \underline{E} \underline{I} \exp^{2j \omega t}\} = 0$$

ce qui est différent de celle du circuit monophasé équivalent qui est elle

$$\Re\{\underline{E} \underline{I} \exp^{2j \omega t}\} \neq 0$$

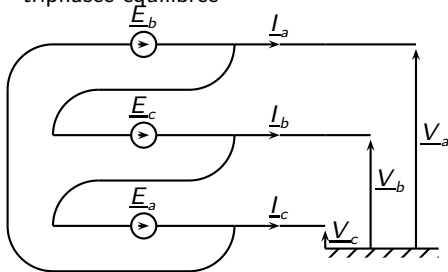
Montages triphasés des sources

► On appelle « *montage en étoile* » la connexion des sources qui a servi à introduire cette subsection



$$\begin{pmatrix} \underline{U}_{ab} \\ \underline{U}_{bc} \\ \underline{U}_{ca} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{E}_a \\ \underline{E}_b \\ \underline{E}_c \end{pmatrix}$$

► On appelle « *montage en triangle* » cette connexion d'une source de tension triphasée équilibrée



$$\begin{pmatrix} \underline{E}_a \\ \underline{E}_b \\ \underline{E}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{V}_a \\ \underline{V}_b \\ \underline{V}_c \end{pmatrix}$$

Passage Triangle $\longleftrightarrow$ étoile

- Le système de sources de tension montées en étoile

$$\underline{E}_a = \underline{E}_\star ; \underline{E}_b = a^2 \underline{E}_\star ; \underline{E}_c = a \underline{E}_\star$$

est équivalent au système de tensions montées en triangle

$$\underline{E}_a = \underline{E}_\Delta ; \underline{E}_b = a^2 \underline{E}_\Delta ; \underline{E}_c = a \underline{E}_\Delta$$

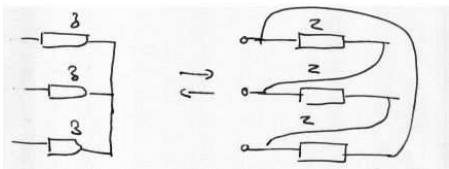
avec

$$|\underline{E}_\Delta| = \sqrt{3} |\underline{E}_\star|$$

la différence de phase entre $\underline{E}_\Delta$ et $\underline{E}_\star$ n'ayant généralement (sauf dans les montages du chap. 3) pas d'importance.

Montage étoile et triangle des charges triphasées équilibrées

- Les charges triphasées peuvent également être montées en triangle ou en étoile.
- La relation entre deux charges triphasées l'une z montée en étoile et l'autre Z en triangle



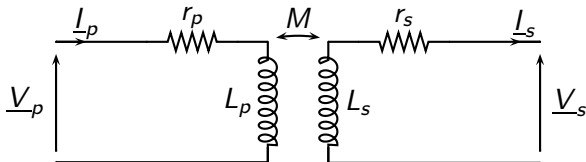
pour qu'elle soient équivalentes du point de vue de leur alimentation est

$$Z = 3 z$$

(théorème de Kennelly ou transformation étoile-triangle appropriés au cas du triphasé équilibré).

Couplage inductif monophasé

- Le passage d'un courant électrique variable en temps dans un circuit électrique génère une tension dans un autre circuit électrique (loi de Faraday) ; c'est le couplage inductif.
- La prise en compte de ce phénomène en monophasé introduit un nouveau élément dans l'idéographie ; les bobines couplées

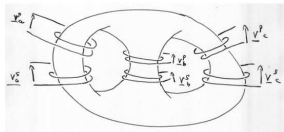


qui correspondent aux relations

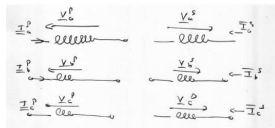
$$\begin{pmatrix} \underline{V}_p \\ \underline{V}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_p + jL_p\omega & jM\omega \\ jM\omega & r_s + jL_s\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{I}_p \\ -\underline{I}_s \end{pmatrix}$$

Couplage inductif triphasé

- La version triphasée des bobine couplées est un peu lourde



de schéma électrique



$$\begin{pmatrix} \frac{V_a^p}{V_b^p} \\ \frac{V_c^p}{V_a^s} \\ \frac{V_b^s}{V_c^s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_p \\ R_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{I_a^p}{I_b^p} \\ \frac{I_c^s}{I_a^s} \end{pmatrix} + j\omega \begin{pmatrix} L_p & M_p & M_p \\ M_p & L_p & M_p \\ M_p & M_p & L_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{ps} & M'_{ps} & M'_{ps} \\ M'_{ps} & M_{ps} & M'_{ps} \\ M'_{ps} & M'_{ps} & M_{ps} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{I_a^p}{I_b^p} \\ \frac{I_c^s}{I_a^s} \end{pmatrix}$$

- Mais quelques calculs amènent à la simplification

$$\begin{pmatrix} \underline{V}^p \\ \underline{V}^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_p + j(L_p - M_p) \omega & j(M_{sp} - M'_{sp}) \omega \\ j(M_{sp} - M'_{sp}) \omega & R_s + j(L_s - M_s) \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{I}^p \\ \underline{I}^s \end{pmatrix}$$

qui est exactement le système d'équations correspondant à un schéma monophasé équivalent de bobines couplées.