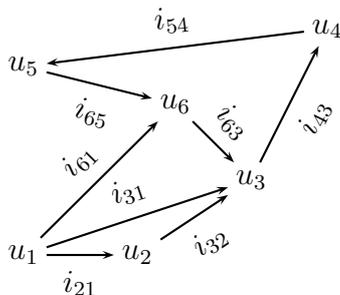


Chapitre 1 : Circuits électriques monophasé et triphasés

Les circuits électriques monophasés

D'un point de vue mathématique, un circuit électrique est un graphe aux nœuds duquel sont attachés des valeurs de potentiel électrique, dont les arêtes sont parcourues par des courants électriques ; et tel qu'il existe une relation algébrique ou différentielle entre les courants d'arêtes et les différences de potentiel aux bornes de ces arêtes.



Ici les nœuds sont numérotés de 1 à 6 ; les valeurs de potentiels u_n sont nommés par le symbole u indicé par les numéros de nœuds ; les valeurs de courant sont nommés par le symbole i double indicé par, dans l'ordre, le numéro de nœud vers lequel est dirigé le courant et le numéro de nœud d'où provient ce courant.

Les « courants incidents à un nœud donné » sont les courants dirigés vers ce nœud mais aussi ceux dont il est la provenance, mais alors dans ce dernier cas ils sont compté négativement. Par exemple les courants incidents au nœud No 3 sont : i_{32} , i_{31} , i_{63} et $-i_{43}$. La « tension aux bornes » ou « différence de potentiels » est

$$v_{nm} = u_n - u_m$$

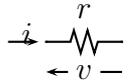
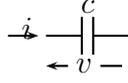
Les lois régissant ces courants et tensions (lois de Kirchhoff) s'énoncent alors comme

La somme des courants incidents à un noeud du circuit électrique est nulle ; la somme des tensions aux bornes des arêtes le long d'un parcours fermé sur le circuit (une maille) est nulle.

Pour un circuit donné, les variables sont les tensions aux bornes (abrégées en « tension ») et les courants, soit donc pour un graphe de N nœuds et A arêtes : $2A$ variables. La loi aux noeuds comporte $N - 1$ relations indépendantes et la loi aux mailles $A - N + 1$; il ne manque plus donc que de définir A relations entre les courants et les tensions pour que l'ensemble de variables soient déterminées.

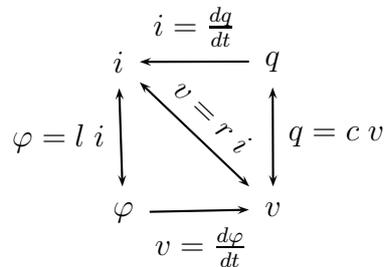
Idéographie des composants électriques

Les composants passifs sont

nom du composant	nom du coefficient	Unité	symbole	relation
résistance	résistance	Ω (Ohm)		$v = r i$
autoinductance	inductance	H (Henry)		
condensateur	capacité	F (Farad)		$i = \frac{dq}{dt}$ avec $q = c v$

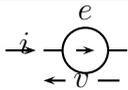
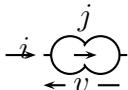
Deux quantités intermédiaires ont été introduites : le « flux magnétique » φ dont l'unité est le Weber (Wb) et la « charge électrique » q dont l'unité est le Coulomb (Cb). L'unité de la « différence de potentiel » ou « tension aux bornes » abrégée en « tension » v est le Volt (V) et celle du courant électrique l'Ampère (A). Toutes les relations linéaires (incluant l'opération de dérivation par rapport au temps) entre le courant et la tension sont figurées par les relations correspondant aux composants passifs.

Il est intéressant de voir ces relations sous la forme du diagramme



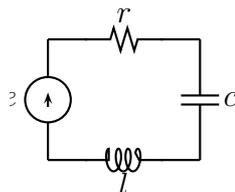
dans lequel chaque couple de variables de l'ensemble $\{q, i, \varphi, v\}$ sont connectées 2 à 2 ; à l'exception de q et φ , qui ne tarderont cependant pas à l'être quand les « memristors » deviendront des composants plus connus.

Les composants actifs sont

nom du composant	nom du coefficient	symbole	relation
force électromotrice	tension		$v = -e$ où e est une donnée
courant source	courant		$i = j$ où j est une donnée

Les composants essentiels étant définis, il est possible de les mettre en situation dans des circuits électriques classiques ainsi que d'introduire l'approximations classique du régime sinusoïdal établi.

Le circuit rlc



Si i est le courant qui parcourt le circuit et v la tension aux bornes du condensateur :

$$e = ri + l \frac{di}{dt} + v \text{ et } i = c \frac{dv}{dt}$$

Si $e(t) = \mathcal{E} \cos(\omega t + \phi)$ on note plutôt

$$e(t) = \sqrt{2} \Re \{ \underline{E} \exp^{j \omega t} \}$$

où $j = \sqrt{-1}$ et $\sqrt{2} \underline{E} = \mathcal{E} \exp^{j \phi}$ et où on appelle $E = |\underline{E}|$ la « valeur efficace » et \underline{E} l'amplitude complexe de la tension $e(t)$. De cette façon la solution de régime établi (régime forcé) s'écrit

$$i(t) = \sqrt{2} \Re \{ \underline{I} \exp^{j \omega t} \} \text{ et } v(t) = \sqrt{2} \Re \{ \underline{V} \exp^{j \omega t} \}$$

où \underline{I} et \underline{V} sont solutions de

$$\underline{E} = (r + j l \omega) \underline{I} + \underline{V} \text{ et } \underline{I} = j c \omega \underline{V}$$

La solution étant acquise, il faut maintenant l'utiliser pour calculer la puissance instantanée qu'il faut fournir à la source de tension afin qu'elle puisse fonctionner comme une source de tension à laquelle est connectée la charge rlc . C'est

$$\underbrace{p(t)}_{\text{puissance instantanée}} = e(t) i(t) = \underbrace{\Re \{ \underline{E} \underline{I}^* \}}_{\text{puissance active notée } P} + \underbrace{\Re \{ \underline{E} \underline{I} \exp^{2j \omega t} \}}_{\text{puissance fluctuante}}$$

qui se décompose en un terme constant, la puissance active et un terme de moyenne temporelle nulle, la puissance fluctuante. On introduit encore deux autres puissances qui sont les

$$\underbrace{S = |\underline{E}| |\underline{I}|}_{\text{puissance apparente}} \text{ et } \underbrace{Q = \Im \{ \underline{E} \underline{I}^* \}}_{\text{puissance réactive}}$$

avec lesquelles on peut écrire

$$S^2 = P^2 + Q^2$$

Dans ce cas du circuit rlc , on obtient

$$\underbrace{S}_{\text{puissance apparente complexe}} = P + jQ = \left(r + j l \omega + \frac{1}{j c \omega} \right) |\underline{I}|^2 = \frac{\left(r - j \left(l \omega - \frac{1}{c \omega} \right) \right)}{r^2 + \left(l \omega - \frac{1}{c \omega} \right)^2} |\underline{E}|^2$$

d'où on déduit que

- si $r = 0$ la puissance active que doit fournir la source est nulle ;
- si $l \rightarrow 0$ et $c \rightarrow \infty$ la puissance réactive que doit fournir la source est nulle ;
- si $l c \omega^2 = 1$ la puissance réactive que doit fournir la source est nulle ; c'est la condition de résonance ;

Circuits monophasés

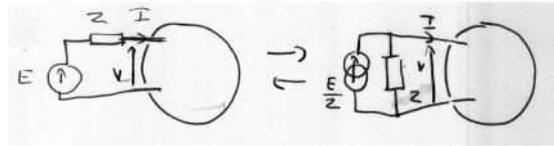
Pour étendre les résultats obtenus dans le cas du circuit rlc , Un circuit monophasé est un circuit dans lequel la ou les sources dépendent sinusoidalement du temps et dans lequel on ne s'intéresse qu'au régime établi. On convient alors d'utiliser la notation complexe

$$u(t) = \sqrt{2} \Re \{ \underline{U} \exp^{j \omega t} \}$$

avec laquelle les relations différentielles deviennent algébriques. Cela permet d'introduire la notion d'impédance qui consiste à sommer toutes les contributions (réelles et imaginaire) des composants en séries afin de les regrouper en un seul coefficient complexe. Pour le circuit rlc

$$\underline{E} = Z \underline{I} \text{ avec } Z = r + j \left(l \omega - \frac{1}{c \omega} \right)$$

Les résolutions de problèmes de circuit électrique en régime sinusoïdal établi sont donc des opérations purement algébriques. Une possibilité souvent utilisée consiste à ne pas écrire ces équations explicitement pour obtenir un système linéaire qu'il faudra inverser mais plutôt à traduire les transformations de ce système directement sur le schéma électrique. Par exemple les « théorèmes » de Thévenin et Norton qui affirment que les tensions et courants \underline{V} et \underline{I} de la figure



seront les mêmes qu'on place à gauche un générateur de tension \underline{E} en série avec un impédance Z ou un générateur de courant \underline{E}/Z en parallèle avec l'impédance Z . Cela se démontre très simplement : si le cercle figure un circuit électrique quelconque et que

$$\underline{E} = Z \underline{I} + \underline{V} \text{ (Forme Thevenin)}$$

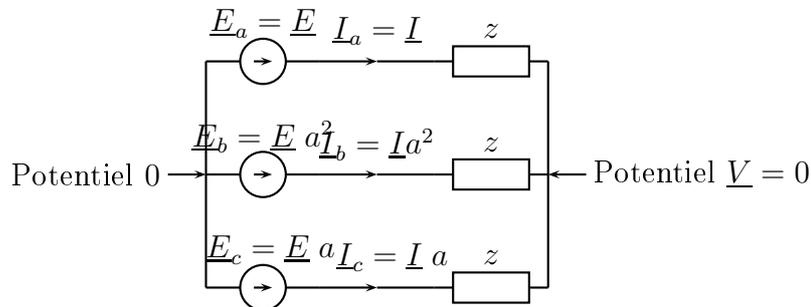
alors on a aussi

$$\frac{\underline{E}}{Z} = \underline{I} + \frac{\underline{V}}{Z} \text{ (Forme Norton)}$$

Et les « transformations Thévenin/Norton » permettent des résolutions de problèmes de circuit électriques à qui sait les utiliser à bon escient.

Les circuits électriques triphasés équilibrés

L'examen d'un circuit électrique comportant plusieurs sources de tension de la forme



montre que

$$\underline{E}_a = z \underline{I}_a + \underline{V} \quad ; \quad \underline{E}_b = z \underline{I}_b + \underline{V} \quad ; \quad \underline{E}_c = z \underline{I}_c + \underline{V}$$

d'où on retire par la loi des noeuds que si $\underline{E}_a + \underline{E}_b + \underline{E}_c = 0$ alors $\underline{V} = 0$ et donc

$$\underline{I}_a = \underline{E}_a / z \quad ; \quad \underline{I}_b = \underline{E}_b / z \quad ; \quad \underline{I}_c = \underline{E}_c / z$$

et si de plus, en posant $a = \exp^{2\pi/3 j}$

$$\underline{E}_a = a^0 \underline{E} \quad ; \quad \underline{E}_b = a^2 \underline{E} \quad ; \quad \underline{E}_c = a^1 \underline{E}$$

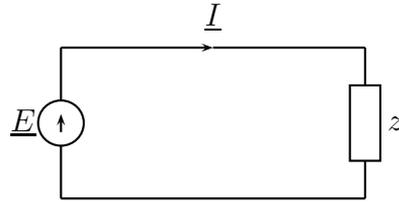
alors

$$\underline{I}_a = a^0 \underline{I} \quad ; \quad \underline{I}_b = a^2 \underline{I} \quad ; \quad \underline{I}_c = a^1 \underline{I}$$

où

$$\underline{I} = \underline{E} / z$$

Il suffit donc de faire un calcul analogue à celui d'un circuit monophasé



pour obtenir la solution des équations qui correspondent au circuit triphasé équilibré.

La somme des puissances issues des sources est

$$\underline{S} = P + jQ = \underline{E}_1 \underline{I}_1^* + \underline{E}_2 \underline{I}_2^* + \underline{E}_3 \underline{I}_3^* = 3 \underline{E} \underline{I}^*$$

Et finalement le courant \underline{I} permet d'obtenir la puissance apparente complexe comme

$$\underline{S} = 3 \underline{E} \underline{I}^*$$

Le produit de cette simplification porte le nom de « *circuit monophasé équivalent* ». Les cas où elle est possible vont maintenant être étudiés en même temps que les notations seront fixées et le vocabulaire consacré défini.

Auparavant cependant, on peut remarquer que la somme des puissances fluctuantes des trois phases est

$$\Re\{(a^0 + a^1 + a^2) \underline{E} \underline{I} \exp^{2j \omega t}\} = 0$$

d'où il sort que la source d'énergie qui fournit la puissance électrique à un système triphasé n'est pas perturbée par des fluctuations dans la consommation de cette puissance (voir Chapitre sur les convertisseurs électromécaniques).

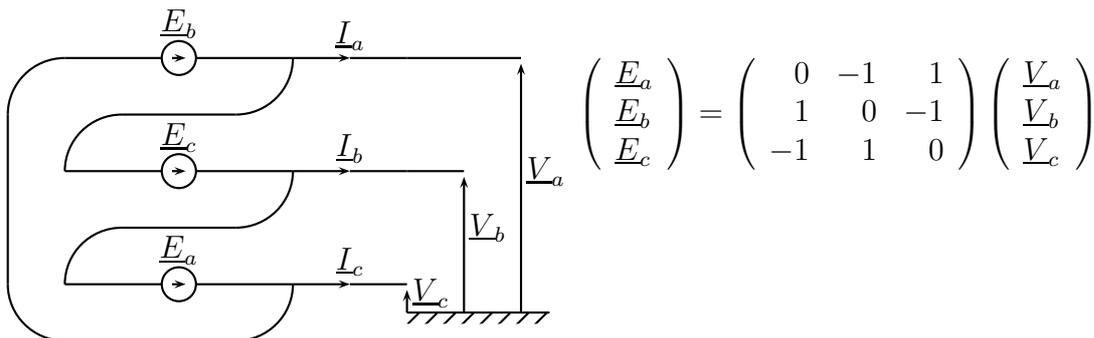
Sources et charges de tension triphasée

On appelle source de tension « *triphase équilibrée directe* » tout ensemble de trois forces électromotrices dépendant sinusoïdalement du temps et dont les amplitudes complexes peuvent se mettre sous la forme ($\underline{E}_a = \underline{E}$, $\underline{E}_b = \underline{E} a^2$, $\underline{E}_c = \underline{E} a$) où $a = \exp^{j 2\pi/3}$.

On appelle « *phases* » les fils portés aux potentiels de valeurs efficace $|\underline{E}|$ et déphasés de $2\pi/3$ les uns avec les autres. Si on permute deux phases dans l'ensemble précédent, on obtient ($\underline{E}_a = \underline{E}$, $\underline{E}_b = \underline{E} a$, $\underline{E}_c = \underline{E} a^2$) qui porte de nom de source de tension « *triphase équilibrée inverse*. » On ne s'inquiétera pas du fait que « direct » signifie « dans le sens des aiguilles d'une montre » alors qu'« inverse » signifie « dans le sens trigonométrique » et on ne précisera pas nécessairement si la source de tension est directe ou inverse, le passage se faisant en permutant a et a^2 dont voici les propriétés essentielles

$$\begin{aligned} 1 + a + a^2 &= 0 \\ a^* &= a^2 \\ a(1 - a) &= \sqrt{3} j \end{aligned}$$

On appelle « *montage en triangle* » cette connexion d'une source de tension triphasée équilibrée



où les « tensions de phase » $\underline{V}_a, \underline{V}_b$ et \underline{V}_c sont référées par rapport à une « masse » (potentiel 0) figurée par un trait muni de hachures.

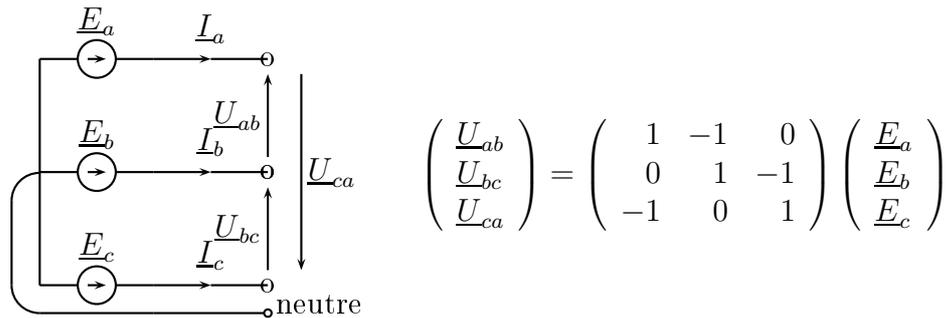
En toute généralité, on ne peut *a priori* pas inverser la relation entre les \underline{E} et les \underline{V} mais dans le cas du triphasé équilibré

$$\begin{aligned} \underline{E}_a &= a^0 \underline{E} & ; & & \underline{E}_b &= a^2 \underline{E} & ; & & \underline{E}_c &= a \underline{E} \\ \underline{V}_a &= a^0 \underline{V} & ; & & \underline{V}_b &= a^2 \underline{V} & ; & & \underline{V}_c &= a \underline{V} \end{aligned}$$

la relation se réduit alors à

$$\underline{E} = a(1 - a) \underline{V} = j \sqrt{3} \underline{V}$$

On appelle « montage en étoile » la connexion des sources qui a servi à introduire cette subsection



On appelle « tension de lignes » les tensions entre phase $\underline{U}_{ab}, \underline{U}_{bc}, \underline{U}_{ca}$; « courant de ligne » les courants $\underline{I}_a, \underline{I}_b, \underline{I}_c$.

Le fil issu de la connexion des trois sources de tension est appelé le « neutre » : son potentiel électrique est 0 dans le fonctionnement triphasé équilibré.

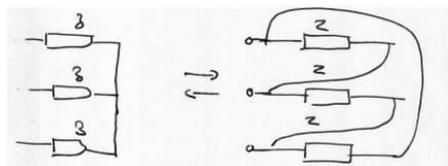
Les tensions de phases $\underline{V}_a, \underline{V}_b, \underline{V}_c$ sont prises entre les phases et le neutre ; ici elle sont donc égales aux tensions sources $\underline{E}_a, \underline{E}_b, \underline{E}_c$. Et en posant

$$\begin{aligned} \underline{U}_{ab} &= a^1 \underline{U} & ; & & \underline{U}_{bc} &= a^0 \underline{U} & ; & & \underline{U}_{ca} &= a^2 \underline{U} \\ \underline{V}_a &= a^0 \underline{U} & ; & & \underline{V}_b &= a^2 \underline{U} & ; & & \underline{V}_c &= a^1 \underline{U} \end{aligned}$$

On obtient

$$\underline{U} = -j \sqrt{3} \underline{V}$$

Les deux types de connexion, en triangle et en étoile, sur les sources viennent d'être expliquées. Il y a également ces deux types de connexions sur les charges équilibrées



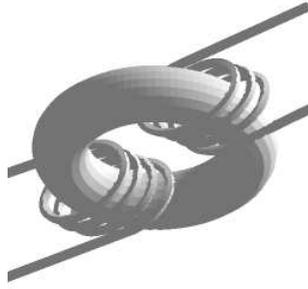
Si

$$Z = 3z$$

alors ces charges sont équivalentes (théorème de Kennelly ou transformation étoile-triangle appropriés au cas du triphasé équilibré).

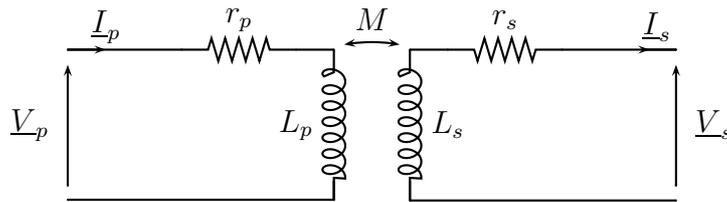
Couplage Inductif

On appelle « bobines couplées » un jeu de deux enroulements de fil autour d'un « circuit magnétique » analogue à ceci



Le circuit magnétique est le tore. Sa propriété est de canaliser l'induction magnétique qui correspond aux courants circulant dans les enroulements.

La modélisation en terme de circuits électriques de ces bobines couplées correspond au schéma (on convient d'appeler « primaire » l'une des bobines et « secondaire » l'autre)



et les équations de circuit électrique associées au schéma sont :

$$\begin{pmatrix} V_p \\ V_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_p + jL_p\omega & jM\omega \\ jM\omega & r_s + jL_s\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p \\ -I_s \end{pmatrix}$$

Même si l'électromagnétisme nécessaire pour les établir n'est pas abordé ici, il faut comprendre que les équations de couplage témoignent d'un phénomène surprenant. Le passage d'un courant en un endroit (au primaire) génère une force électromotrice en un autre endroit (au secondaire) : c'est une action à distance.

D'autre part, ce type de relation généralise des relations locales entre les tensions et les courants. Si par exemple dans le graphe du début de ce chapitre les arêtes (3,4) et (1,2) correspondaient à un couplage inductif, alors plutôt que d'avoir deux relations indépendantes l'une de l'autre comme

$$V_{43} = z_{43} I_{43} \text{ et } V_{21} = z_{21} I_{21}$$

il y aurait deux relations couplées de la forme

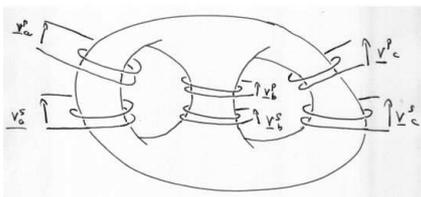
$$\begin{pmatrix} V_{34} \\ V_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{43} & jM_{43/21}\omega \\ jM_{21/43}\omega & z_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{43} \\ -I_{21} \end{pmatrix}$$

où les coefficients d'inductance mutuelle sont par nature identiques

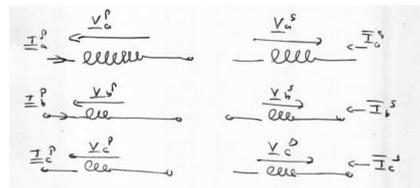
$$M_{21/43} = M_{43/21}$$

ce qui signifie que l'action qu'exerce le courant I_{43} sur la portion de circuit parcourue par le courant I_{21} est identique à l'action qu'exerce le courant I_{21} sur la portion de circuit parcourue par le courant I_{43} .

Des bobines triphasées peuvent également être couplées : il y a alors six bobines disposées ainsi sur un circuit magnétique



de schéma électrique



et les équations correspondant à ce schéma sont obtenues en reprenant pour chacun des couples de bobines les résultats en monophasé et en superposant le tout

$$\begin{pmatrix} \left(\begin{array}{c} \underline{V}_a^p \\ \underline{V}_b^p \\ \underline{V}_c^p \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{c} \underline{V}_a^s \\ \underline{V}_b^s \\ \underline{V}_c^s \end{array} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_p \left(\begin{array}{c} \underline{I}_a^p \\ \underline{I}_b^p \\ \underline{I}_c^p \end{array} \right) \\ R_s \left(\begin{array}{c} \underline{I}_a^s \\ \underline{I}_b^s \\ \underline{I}_c^s \end{array} \right) \end{pmatrix} + j\omega \begin{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc} L_p & M_p & M_p \\ M_p & L_p & M_p \\ M_p & M_p & L_p \end{array} \right) & \left(\begin{array}{ccc} M_{ps} & M'_{ps} & M'_{ps} \\ M'_{ps} & M_{ps} & M'_{ps} \\ M'_{ps} & M'_{ps} & M_{ps} \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{ccc} M_{ps} & M'_{ps} & M'_{ps} \\ M'_{ps} & M_{ps} & M'_{ps} \\ M'_{ps} & M'_{ps} & M_{ps} \end{array} \right) & \left(\begin{array}{ccc} L_s & M_s & M_s \\ M_s & L_s & M_s \\ M_s & M_s & L_s \end{array} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\begin{array}{c} \underline{I}_a^p \\ \underline{I}_b^p \\ \underline{I}_c^p \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{c} \underline{I}_a^s \\ \underline{I}_b^s \\ \underline{I}_c^s \end{array} \right) \end{pmatrix}$$

et en posant comme précédemment

$$\begin{aligned} \underline{V}_a^p = a^0 \underline{V}^p \quad ; \quad \underline{V}_b^p = a^2 \underline{V}^p \quad ; \quad \underline{V}_c^p = a^1 \underline{V}^p \quad & \underline{V}_a^s = a^0 \underline{V}^s \quad ; \quad \underline{V}_b^s = a^2 \underline{V}^s \quad ; \quad \underline{V}_c^s = a^1 \underline{V}^s \\ \underline{I}_a^p = a^0 \underline{I}^p \quad ; \quad \underline{I}_b^p = a^2 \underline{I}^p \quad ; \quad \underline{I}_c^p = a^1 \underline{I}^p & \underline{I}_a^s = a^0 \underline{I}^s \quad ; \quad \underline{I}_b^s = a^2 \underline{I}^s \quad ; \quad \underline{I}_c^s = a^1 \underline{I}^s \end{aligned}$$

on arrive à la simplification

$$\begin{pmatrix} \underline{V}^p \\ \underline{V}^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_p + j(L_p - M_p) \omega & j(M_{sp} - M'_{sp}) \omega \\ j(M_{sp} - M'_{sp}) \omega & R_s + j(L_s - M_s) \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{I}^p \\ \underline{I}^s \end{pmatrix}$$

qui est exactement le système d'équations correspondant à un schéma monophasé équivalent de bobines couplées. $L_s - M_s$ et $L_p - M_p$ s'appellent « *les inductances cycliques* » au primaire et au secondaire ; et $M_{sp} - M'_{sp}$ s'appelle la mutuelle cyclique entre le primaire et le secondaire.

Références

- [1] R.-P. Bouchard, G. Oliver « Circuits et machines électriques », Édition de l'école polytechnique de Montréal, 1995. (Pour une approche électrotechnique des circuits électriques.)
- [2] M. Hasler, J. Neiryck, « Circuits non linéaires », Presses polytechniques Romandes, 1985. (Pour une approche globale des systèmes dynamiques que sont les circuits électriques.)

Exercices

1. Identification en monophasé

Sous une fréquence $f = 50 \text{ Hz}$, on impose une tension de $V = 230 \text{ V}$ aux bornes d'un dipôle ; le courant est $I = 10 \text{ A}$ et la puissance active $P = 500 \text{ W}$.

- a) Si la relation entre courant et tension est modélisée par une résistance r_1 en série avec une inductance l_1 , calculer les valeurs de r_1 et l_1 .
- b) Si la relation entre courant et tension est maintenant modélisée par une résistance r_2 en parallèle avec une inductance l_2 , calculer les valeurs de r_2 et l_2 .
- c) On remarque que $l_1 \approx l_2$, $r_1 \ll r_2$ et $r_1 r_2 \approx l_1 l_2 (2\pi f)^2$; pourquoi ?

2. Identification en triphasé

Sous une fréquence $f = 50 \text{ Hz}$, on impose une tension entre phases $U = 400 \text{ V}$ (cette tension est appelée la tension de lignes) aux bornes d'une charge triphasée équilibrée ; le courant dans chacune des phases est $I = 10 \text{ A}$ (ce courant est appelé courant de phase) ; la puissance active mesurée en prenant la tension entre le neutre et une phase (cette tension est appelée tension de phase) est $P = 500 \text{ W}$.

- a) La charge est composée d'une résistance r_1 en série avec une inductance l_1 placées en étoile ; trouver la valeur de r_1 et l_1 .
- b) La charge est composée d'une résistance r_2 en série avec une inductance l_2 placées en triangle ; trouver la valeur de r_2 et l_2 .

3. Couplage en monophasé

On donne un système de deux bobines 1 et 2 couplées dont les résistances sont r_1 et r_2 , les inductances propres l_1 et l_2 et l'inductance mutuelle m .

- a) On place aux bornes de la bobine 2 une charge de résistance R ; calculer l'impédance équivalente aux bornes de la bobine 1 ;
- b) Lorsque la tension aux bornes de la bobine 1 est maintenue constante, pour quelle valeur de R la puissance active injectée à la charge est-elle maximale ? Quel est alors le rendement ?

4. Couplage en triphasé

On donne un système de bobines triphasés comportant donc un primaire et un secondaire.

- a) Le primaire et le secondaire sont connectés en étoile ; le primaire est alimenté par une source triphasée équilibrée connectée en étoile ; le secondaire est relié à une charge triphasée équilibrée connectée en étoile. Donner le courant issu d'une phase de la charge.
- b) Même question que a) dans le cas où la charge est connectée en triangle.
- c) Même question que a) dans le cas où le secondaire est connecté en triangle.
- d) Même question que a) dans le cas où le primaire est connecté en triangle.

5. Problèmes

- a) Comment créer un neutre artificiel en triphasé? On dispose d'un système triphasé sans neutre et on souhaite en créer un.
- b) Comment résoudre la question d'éclairer un couloir de mine? Un couloir très long doit être éclairé par une lampe de résistance R tous les x mètres; les fils d'amené de courant ont une résistance par unité de longueur de ρ ; la tension source à l'entrée du couloir est U et les lampes doivent être alimentées par une tension comprise entre U et $U - \Delta U$.