

Lignes électriques

G. Vinsard

2006–2009

L'équation du télégraphiste de la ligne bifilaire dans le vide

Où on explique comment obtenir l'équation du télégraphiste à partir de l'exemple le plus simple de ligne qui est celui la ligne bifilaire placée dans le vide.

Le modèle de Maxwell

Le modèle de Maxwell est appelé ainsi parce qu'il utilise directement les équations de Maxwell pour représenter la ligne électrique bifilaire.

Rappels sur le champ électromagnétique

L'espace E_3 où la position est repérée par $\vec{x} = x_1 \vec{k}_1 + x_2 \vec{k}_2 + x_3 \vec{k}_3$, est identifié à \mathbb{R}^3 l'espace des coordonnées où on note le point $x = (x_1, x_2, x_3)$.

On introduit (également sous forme de coordonnées) les champs dépendant aussi du temps t : d'abord le champ scalaire

$$\begin{aligned} \rho &: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & \text{densité de charges} & C/m^3 \\ (x, t) &\longrightarrow \rho(x, t) \end{aligned}$$

puis les champs de vecteurs

j :	$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$		
	$(x, t) \longrightarrow j(x, t) = (j_1(x, t), j_2(x, t), j_3(x, t))$		
h :	$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$		
	$(x, t) \longrightarrow h(x, t) = (h_1(x, t), h_2(x, t), h_3(x, t))$		
e :	$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$		
	$(x, t) \longrightarrow e(x, t) = (e_1(x, t), e_2(x, t), e_3(x, t))$		
b :	$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$		
	$(x, t) \longrightarrow b(x, t) = (b_1(x, t), b_2(x, t), b_3(x, t))$		
d :	$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$		
	$(x, t) \longrightarrow d(x, t) = (d_1(x, t), d_2(x, t), d_3(x, t))$		

densité de courant électrique A/m^2

champ magnétique A/m

champ électrique V/m

induction magnétique T

induction électrique C/m^2

Ce qu'on appelle équations de Maxwell sont ces relations entre les champs

$$\begin{aligned} \nabla \times h &= j + \partial_t d & \text{Maxwell-Ampère} \\ \nabla \times e &= -\partial_t b & \text{Maxwell-Faraday} \\ \nabla \cdot b &= 0 & \text{Conservation de l'induction magnétique} \\ \nabla \cdot d &= \rho & \text{Gauss-électrique} \end{aligned}$$

où les opérateurs vectoriels sont définis à partir du vecteur symbolique $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ de Hamilton¹ où ∂_t désigne la dérivée partielle par rapport à la variable de temps t et ∂_n la dérivée partielle par rapport

¹Rappelons que si on dispose de la notion de produits scalaire et vectoriel pour les vecteurs ordinaires (si $a = (a_1, a_2, a_3)$ et $b = (b_1, b_2, b_3)$ alors $a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ et $a \times b = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$) on utilise alors directement ces définitions entre ∇ et un champ de vecteur $a(x) = (a_1(x), a_2(x), a_3(x)) = (a_1(x_1, x_2, x_3), a_2(x_1, x_2, x_3), a_3(x_1, x_2, x_3))$ à ceci près qu'on remplace les multiplications par l'application de l'opération dérivation par rapport aux variables x_1, x_2, x_3 que représentent ∂_1, ∂_2 et ∂_3 : $\nabla \cdot a = \partial_1 a_1 + \partial_2 a_2 + \partial_3 a_3$ et $\nabla \times a = (\partial_2 a_3 - \partial_3 a_2, \partial_3 a_1 - \partial_1 a_3, \partial_1 a_2 - \partial_2 a_1)$.

à la variable de position x_n .

De plus on ajoute les relations constitutives

$$\left. \begin{array}{l} b(x, t) = \mu_0 h(x, t) \text{ relation magnétique } \mu_0 = 4\pi 10^{-7} H/m \\ d(x, t) = \epsilon_0 e(x, t) \text{ relation diélectrique } \epsilon_0 = 1/(36\pi 10^{10}) F/m \\ j(x, t) = s(x) e(x, t) \text{ loi d'Ohm } \end{array} \right\} \text{valable partout et en tous temps ;}$$

$j(x, t) = s(x) e(x, t)$ Attention ! $s(x)$, qu'on peut appeler la fonction de conductivité électrique, dépend de l'espace.

Le modèle de Maxwell

On donne les trois domaines de \mathbb{R}^3 : $D_- = \{x \text{ tel que } (x_1 + d/2)^2 + x_2^2 < a^2\}$, $D_+ = \{x \text{ tel que } (x_1 - d/2)^2 + x_2^2 < a^2\}$ et $D_0 = \{x \notin D_+ \cup D_-\}$ qui recouvrent \mathbb{R}^3 .

L'introduction de ce qu'on va convenir d'appeler une ligne bifilaire (dans l'espace vide) se traduit alors par la spécification (σ est réel et positif, c'est la conductivité électrique² du matériau utilisé pour la ligne)

$$s(x) = \begin{cases} \sigma & \text{si } x \in D_+ \cup D_- \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et le problème de la description en terme de champs de la ligne bifilaire consiste à trouver toutes les solutions possibles des équations de Maxwell munies des relations constitutives dans ce cas.

Comme il y a loin de la coupe aux lèvres, le mieux est de chercher une approche plus simple qui est celle de l'équation du télégraphiste.

L'équation du télégraphiste

Établissement de l'équation du télégraphiste

On reprend le modèle de Maxwell et, en appelant $k_1 = (1, 0, 0)$, $k_2 = (0, 1, 0)$ et $k_3 = (0, 0, 1)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 on définit les objets géométriques

$\Pi(x_3) = (x_1, x_2, x_3)$ tel que $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$	plan de coupe en x_3
$S_+(x_3) = D_+ \cap \Pi(x_3)$	disque orienté par sa normale k_3
$S_-(x_3) = D_- \cap \Pi(x_3)$	disque orientée par sa normale $-k_3$
$\Gamma(x_3) = \{(x_1, 0, x_3) \text{ tel que } -d/2 < x_1 < d/2\}$	segment droit de tangente k_1
$\delta\Gamma_+(x_3, \delta x_3) = \{(d/2, 0, x_3 + u \delta x_3) \text{ tel que } 0 < u < 1\}$	segment droit de tangente k_3
$\delta\Gamma_-(x_3, \delta x_3) = \{(-d/2, 0, x_3 + (1-u) \delta x_3) \text{ tel que } 0 < u < 1\}$	segment droit de tangente $-k_3$
$\delta S(x_3, \delta x_3) = \{(x_1, 0, u) \text{ tel que } -d/2 < x_1 < d/2$ et $x_3 < u < x_3 + \delta x_3\}$	surface de normale k_2

Puis on définit les grandeurs intégrales³

$i_+(x_3, t) = \int_{S_+(x_3)} j_3(x_1, x_2, x_3, t) dx_1 dx_2$	le courant électrique dans D_+
$i_-(x_3, t) = \int_{S_-(x_3)} j_3(x_1, x_2, x_3, t) dx_1 dx_2$	le courant électrique dans D_-
$v(x_3, t) = \int_{\Gamma(x_3)} e_1(x_1, 0, x_3, t) dx_1$	la différence de potentiel entre D_+ et D_-
$\varphi(x_3, t) = \int_{\Gamma(x_3)} b_2(x_1, 0, x_3, t) dx_1$	le flux magnétique par unité de longueur de la ligne bifilaire
$q_+(x_3, t) = \int_{S_+(x_3)} \rho(x_1, x_2, x_3, t) dx_1 dx_2$	la charge électrique par unité de longueur dans D_+
$q_-(x_3, t) = \int_{S_-(x_3)} \rho(x_1, x_2, x_3, t) dx_1 dx_2$	la charge électrique par unité de longueur dans D_-

²la conductivité électrique est l'inverse de la résistivité électrique qui a pour unité Ωm et les ordres de grandeur de la conductivité sont : pour du cuivre $\approx 1/(2.0 10^{-8}) (\Omega m)^{-1}$, pour l'alliage d'aluminium appelé almélec et généralement utilisé dans les lignes réelles $1/(3 10^{-8}) (\Omega m)^{-1}$.

³Attention aux définitions des charges par unités de longueur. Elles ne signifient pas que les charges électriques sont réparties uniformément sur les subsections S_+ et S_- , ce qui serait parfaitement faux.

et enfin on utilise les équations du modèle de Maxwell pour obtenir, au prix d'hypothèses, des relations qui ne contiennent que i_+ , i_- , v , ϕ , q_+ et q_- et qui forment donc un jeu complet dans le sens où leur calcul autonome est possible.

Quelques hypothèses nécessaires

H0 : La première des hypothèses porte sur la symétrie du problème. On suppose que de part et d'autre du plan $x_1 = 0$ le champ électromagnétique est tel que

$$i_-(x_3, t) = -i_+(x_3, t) = -i(x_3, t) \text{ et } q_-(x_3, t) = -q_+(x_3, t) = -q(x_3, t)$$

C'est moins une hypothèse que quelque chose qui pourrait se démontrer par ce qu'on appelle des considérations de symétrie ; mais l'affaire est un peu plus sérieuse qu'elle en a l'air aussi place-t-on ceci dans les hypothèses.

H1 : La seconde suppose la densité de courant électrique dirigée suivant k_3 et uniformément répartie dans les sections S_+ et S_- soit

$$j = (0, 0, j_3) \text{ avec } j_3(x_1, x_2, x_3, t) = \begin{cases} i(x_3, t)/(\pi a^2) & \text{pour } x \in D_+ \\ -i(x_3, t)/(\pi a^2) & \text{--- } x \in D_- \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Là c'est une vraie hypothèse qui peut d'ailleurs ne pas être avérée dans des cas concrets. Notamment une analyse électromagnétique du problème plus fine que celle qu'on a l'intention de réaliser ici montre que dès lors qu'il dépend du temps le courant ne se répartit pas de façon uniforme dans les conducteurs et donc formellement il faudrait tenir compte de ce qui s'appelle l'effet Kelvin, ce qui ne sera pas fait ici mais sera probablement expliqué dans un cours d'électromagnétisme ultérieur.

Maxwell-Faraday On intègre les deux membres de l'équation de Maxwell-Faraday sur la surface $\delta S(x_3)$ après avoir fait le produit scalaire avec la normale à cette surface. Il vient après avoir utilisé la formule de Stokes (c'est le moment de revoir le cours de mathématique pour l'ingénieur, 1ière partie, p 66) sur le premier membre et après quelques calculs qui seront menés en séance

$$v(x_3 + \delta x_3, t) - \int_{x_3}^{x_3 + \delta x_3} e_3(-d/2, 0, u, t) du - v(x_3, t) + \int_{x_3}^{x_3 + \delta x_3} e_3(d/2, 0, u, t) du = -\frac{d}{dt} \int_{x_3}^{x_3 + \delta x_3} \varphi(x_3, t) dx_3$$

Avec l'hypothèse H1, la loi d'Ohm et en exprimant que δx_3 est petit on arrive alors à

$$\int_{x_3}^{x_3 + \delta x_3} e_3(d/2, 0, u, t) du \approx \frac{\delta x_3}{\sigma \pi a^2} i(x_3) \text{ et } \int_{x_3}^{x_3 + \delta x_3} e_3(-d/2, 0, u, t) du \approx -\frac{\delta x_3}{\sigma \pi a^2} i(x_3)$$

ce qui permet de transformer l'équation de Maxwell-Faraday en

$$-\partial_3 v(x_3, t) = r i(x_3, t) + \partial_t \varphi(x_3, t) \text{ avec } r = \frac{2}{\sigma \pi a^2} \text{ (la résistance électrique par unité de longueur)}$$

qui constitue un premier résultat.

Conservation du courant électrique En prenant la divergence de Maxwell-Ampère et en utilisant Gauss-électrique on arrive à

$$\nabla \cdot j + \partial_t \rho = 0$$

qui exprime que la densité de courant électrique est un courant de charges électriques convectées.

Avec l'hypothèse H1 cette équation se transforme en

$$\partial_3 i(x_3, t) + \partial_t q(x_3, t) = 0$$

qui constitue un second résultat.

Bilan à mi-parcours En faisant abstraction des aspects dissipatifs, on est arrivé à établir les liaisons indiquées

$$\begin{array}{ccc}
 i & \xleftrightarrow{-\partial_3 i = \partial_t q} & q \\
 ? \uparrow & & \uparrow ? \\
 \varphi & \xleftrightarrow{-\partial_3 v = \partial_t \varphi} & v
 \end{array}$$

mais le modèle ne sera complet que lorsqu'on aura ajouté les liaisons marquées d'un « ? » entre i et φ d'une part et q et v d'autre part.

Une hypothèse supplémentaire

H2 : la relation entre i et φ d'une part et la relation entre q et v d'autre part peuvent être établies en faisant comme si i , φ , q et v ne variaient pas le long de l'axe x_3 .

L'hypothèse peut évidemment être prise en défaut, et il convient de surveiller ce point quand on utilise l'équation du télégraphiste.

L'intérêt majeur de l'hypothèse est qu'ainsi on n'a plus besoin que de la magnétostatique et de l'électrostatique bidimensionnelles pour clore l'analyse et obtenir l'équation du télégraphiste.

Problème de magnétostatique bidimensionnelle On utilise Maxwell-Ampère sans le courant de déplacement ($\nabla \times h = j$), la conservation de l'induction magnétique ($\nabla \cdot b = 0$) et la relation magnétique du vide ($b = \mu_0 h$) pour obtenir avec les hypothèses H1, H2 que $\forall x_3$

$$b_2(x_1, 0, x_3, t) = \frac{\mu_0 i(x_3, t)}{2\pi} \left[\begin{cases} \frac{1}{x_1 - d/2} & \text{si } |x_1 - d/2| > a \\ \frac{1}{a^2} & \text{sinon} \end{cases} \right] - \left[\begin{cases} \frac{1}{x_1 + d/2} & \text{si } |x_1 + d/2| > a \\ \frac{1}{a^2} & \text{sinon} \end{cases} \right]$$

d'où, par intégration directe

$$\varphi(x_3, t) = l i(x_3, t) \text{ avec } l = \frac{\mu_0}{\pi} \left(\log \frac{d}{a} + \frac{1}{2} \right) \text{ (l'inductance par unité de longueur)}$$

Cette façon de faire comporte cependant une petite erreur (que Maxwell lui-même a fait) et qui devrait être levée dans un cours d'électromagnétisme pour lequel la valeur corrigée de l'inductance sera

$$l = \frac{\mu_0}{\pi} \left(\log \frac{d}{a} + \frac{1}{4} \right)$$

Problème d'électrostatique bidimensionnelle On utilise Maxwell-Faraday sans l'induction magnétique ($\nabla \times e = 0$), Gauss-électrique ($\nabla \cdot d = \rho$) et la relation diélectrique ($d = \epsilon_0 e$) pour obtenir avec les hypothèses H1, H2 que

$$q = c v \text{ avec } c = \frac{\epsilon_0 \pi}{\log \left(\frac{d}{2a} + \sqrt{\left(\frac{d}{2a} \right)^2 - 1} \right)} \text{ (la capacité par unité de longueur)}$$

Si on a fait l'analyse (relevant d'un cours d'électromagnétisme ultérieur) que la tension est uniformément répartie dans les conducteurs, le détail du calcul de la capacité est fait en exercice dans le cadre du cours d'analyse complexe de semestre 2.

L'équation du télégraphiste pour la ligne bifilaire dans le vide La collection des résultats obtenus permet d'écrire que sous réserve des hypothèses H0, H1 et H2 le courant et la tension tels que définis précédemment sont solutions de

$$\begin{cases} -\partial_3 i = c \partial_t v \\ -\partial_3 v = r i + l \partial_t i \end{cases}$$

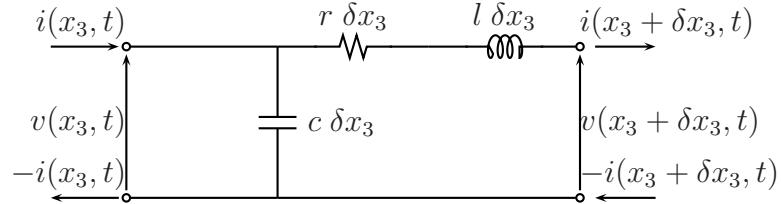
où les coefficients linéiques r, l, c dépendent des paramètres géométriques d et a suivant des expressions claires.

L'équation du télégraphiste est généralement présentée en éliminant l'une des variables i ou v du système précédent au prix de l'introduction de dérivées d'ordre deux. Par exemple pour le courant

$$\partial_{33}^2 i = rc \partial_t i + lc \partial_{tt}^2 i$$

L'intérêt est que le caractère hyperbolique de l'équation aux dérivées partielles apparaît clairement.

Et enfin on peut signaler qu'il est courant de présenter l'équation du télégraphiste par ce schéma électrique



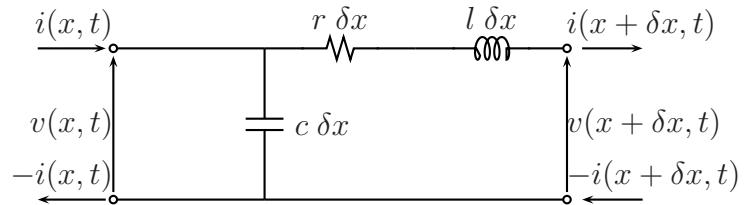
qui met en relation des couples (tension, courant) à la position x_3 et à la position $x_3 + \delta x_3$ conformément aux équations qui viennent d'être obtenues et est peut-être un bon moyen mnémotechnique pour se souvenir des relations.

Modèle de ligne électrique en régime sinusoïdal établi

Où on part de l'équation du télégraphiste (voir le document consacré à l'établissement de l'équation du télégraphiste dans ce wiki) pour obtenir un modèle de circuit électrique propre à représenter une ligne électrique.

L'équation du télégraphiste

Le schéma électrique de l'équation du télégraphiste est



qui met en relation des couples (tension, courant) à la position x et à la position $x + \delta x$ sur la ligne de manière qu'on puisse retrouver que le système d'équations aux dérivées partielles liant la tension et le courant est

$$\begin{cases} -\partial_x i = c \partial_t v \\ -\partial_x v = r i + l \partial_t i \end{cases}$$

où les coefficients linéiques r, l, c sont les résistances, inductance et capacité par unité de longueur de la ligne.

Application au cas où les grandeurs sont sinusoïdales en temps

Si on suppose que la tension et le courant sont de la forme

$$v(x, t) = \sqrt{2} \Re{\underline{V}(x) \exp^{j \omega t}} \quad ; \quad v(x, t) = \sqrt{2} \Re{\underline{I}(x) \exp^{j \omega t}}$$

où $\underline{V}(x)$ et $\underline{I}(x)$ sont des amplitudes complexes dépendant de la position x , on obtient alors

$$\Re \left\{ \left(\frac{d\underline{I}}{dx} + j c \omega \underline{V} \right) \exp^{j \omega t} \right\} = 0 \quad ; \quad \Re \left\{ \left(\frac{d\underline{V}}{dx} + r \underline{I}(x) + j l \omega \underline{I} \right) \exp^{j \omega t} \right\} = 0$$

Ces relations doivent être réalisées pour tout temps et en particulier pour $t = 0$ et $t = \pi/(2\omega)$ d'où

$$\frac{d\underline{I}}{dx} + j c\omega \underline{V} = 0 \quad ; \quad \frac{d\underline{V}}{dx} + (r + j l\omega) \underline{I} = 0$$

C'est un système d'équations différentielles ordinaires qui s'intègre exactement comme décrit dans le cours *introduction aux équations différentielles ordinaires du semestre 1* (p. 19) et dont la solution est⁴

$$\begin{pmatrix} \underline{V}(x) \\ \underline{I}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{j c\omega(r + j l\omega)} x) & \frac{-\sqrt{r + j l\omega}}{\sqrt{j c\omega}} \sinh(\sqrt{j c\omega(r + j l\omega)} x) \\ \frac{-\sqrt{j c\omega}}{\sqrt{r + j l\omega}} \sinh(\sqrt{j c\omega(r + j l\omega)} x) & \cosh(\sqrt{j c\omega(r + j l\omega)} x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{V}(0) \\ \underline{I}(0) \end{pmatrix}$$

où on utilise les valeurs de la tension et du courant à la position $x = 0$ comme constantes d'intégration.

Si la ligne est de longueur H et qu'on pose

$$\begin{cases} \underline{I}_0 = \underline{I}(0) \\ \underline{V}_0 = \underline{V}(0) \end{cases} ; \quad \begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{I}(H) \\ \underline{V}_1 = \underline{V}(H) \end{cases}$$

qui sont les courants et les tensions aux deux extrémités de la ligne; on obtient la relation quadripolaire (les quadripoles seront sans doute enseignés ultérieurement)

$$\begin{pmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{j c\omega(r + j l\omega)} H) & \frac{-\sqrt{r + j l\omega}}{\sqrt{j c\omega}} \sinh(\sqrt{j c\omega(r + j l\omega)} H) \\ \frac{-\sqrt{j c\omega}}{\sqrt{r + j l\omega}} \sinh(\sqrt{j c\omega(r + j l\omega)} H) & \cosh(\sqrt{j c\omega(r + j l\omega)} H) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{V}_0 \\ \underline{I}_0 \end{pmatrix}$$

entre les tensions et courants aux deux extrémités.

On remarque que cette relation s'inverse facilement pour donner

$$\begin{pmatrix} \underline{V}_0 \\ \underline{I}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{j c\omega(r + j l\omega)} H) & \frac{\sqrt{r + j l\omega}}{\sqrt{j c\omega}} \sinh(\sqrt{j c\omega(r + j l\omega)} H) \\ \frac{\sqrt{j c\omega}}{\sqrt{r + j l\omega}} \sinh(\sqrt{j c\omega(r + j l\omega)} H) & \cosh(\sqrt{j c\omega(r + j l\omega)} H) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Ligne sans perte Joule

Dans ce cas on a $r = 0$ et la relation précédente devient

$$\begin{pmatrix} \underline{V}_0 \\ \underline{I}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{l c\omega} H) & j \sqrt{\frac{l}{c}} \sin(\sqrt{l c\omega} H) \\ j \sqrt{\frac{c}{l}} \sin(\sqrt{l c\omega} H) & \cos(\sqrt{l c\omega} H) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix}$$

On appelle

$z = \sqrt{l/c}$	impédance caractéristique de la ligne	Ω
$v = 1/\sqrt{lc}$	vitesse de propagation dans la ligne	m/s
ω	pulsation source	rd/s
f	fréquence source	Hz
$\lambda = v/f$	longueur d'onde dans la ligne à la fréquence source f	m

ce qui permet de réécrire sous forme plus compacte

$$\begin{pmatrix} \underline{V}_0 \\ \underline{I}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(2\pi \frac{H}{\lambda}\right) & j z \sin\left(2\pi \frac{H}{\lambda}\right) \\ j \frac{1}{z} \sin\left(2\pi \frac{H}{\lambda}\right) & \cos\left(2\pi \frac{H}{\lambda}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix}$$

⁴Secondairement, on n'hésitera pas à utiliser le calcul formel : voir les instructions mathematica dans le wiki

et d'analyser simplement la situation où la ligne alimente une charge d'impédance Z soit

$$\underline{V}_1 = Z \underline{I}_1$$

L'impédance à l'entrée de la ligne est alors

$$\frac{\underline{V}_0}{\underline{I}_0} = \frac{Z \cos\left(2\pi \frac{H}{\lambda}\right) + j z \sin\left(2\pi \frac{H}{\lambda}\right)}{j \frac{Z}{z} \sin\left(2\pi \frac{H}{\lambda}\right) + \cos\left(2\pi \frac{H}{\lambda}\right)}$$

Ligne en court-circuit $Z = 0$

L'impédance d'entrée de ligne devient

$$\frac{\underline{V}_0}{\underline{I}_0} = j z \tan\left(2\pi \frac{H}{\lambda}\right) \quad \text{et la ligne est}$$

si $0 < H < \frac{\lambda}{4}$	une inductance pure ;
si $\frac{\lambda}{4} < H < \frac{\lambda}{2}$	une capacité pure ;
pour $H = \frac{\lambda}{4}$	un circuit ouvert (à vide) ;
pour $H = \frac{\lambda}{2}$	un court-circuit.

Ligne à vide $Z = \infty$

L'impédance d'entrée de ligne devient

$$\frac{\underline{V}_0}{\underline{I}_0} = \frac{-jz}{\tan\left(2\pi \frac{H}{\lambda}\right)} \quad \text{et la ligne est}$$

si $0 < H < \frac{\lambda}{4}$	une capacité pure ;
si $\frac{\lambda}{4} < H < \frac{\lambda}{2}$	une inductance pure ;
pour $H = \frac{\lambda}{4}$	un court-circuit ;
pour $H = \frac{\lambda}{2}$	un circuit ouvert (à vide).

Ligne chargée par une résistance de valeur $Z = z$

L'impédance d'entrée de ligne devient $\frac{\underline{V}_0}{\underline{I}_0} = z$ la ligne est une résistance pure !

Explications

On voit que suivant la longueur de ligne l'ensemble ligne+charge peut avoir des comportements bien différents.

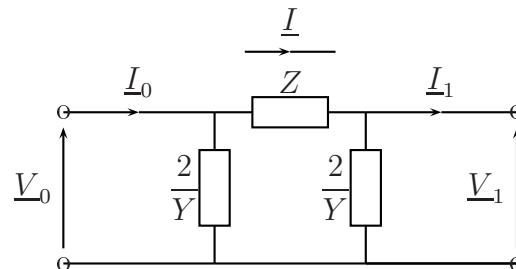
Cette variété s'explique par le fait que l'équation du télégraphiste porte en elle le mécanisme essentiel de la propagation et que passer directement en régime établi sinusoïdal comme on l'a fait conduit en fait à l'étude du régime particulier des ondes stationnaires.

L'analyse serait très intéressante à faire (voir par exemple la rubrique télégraphiste dans onde électromagnétique de ce wiki) mais elle sort du cadre usuel de l'étude des lignes électriques transportant de la puissance dans lequel on convient de ne jamais dépasser une longueur d'une fraction du quart de longueur d'onde.

Circuit électrique équivalent

L'habitude est d'exprimer les équations liant les tensions et courants d'entrée et de sortie de la ligne (1) au moyen d'un schéma électrique.

Il y a plusieurs possibilités dont celle du schéma en Π (Y est une admittance)



qui correspond aux équations

$$\frac{Y}{2} \underline{V}_0 = \underline{I} - \underline{I}_0 \quad ; \quad \frac{Y}{2} \underline{V}_1 = \underline{I}_0 - \underline{I} \quad ; \quad \underline{V}_0 - \underline{V}_1 = Z \underline{I}$$

et à la mise en forme quadripolaire

$$\begin{pmatrix} \underline{V}_0 \\ \underline{I}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{Y Z}{2} & Z \\ \frac{Y}{2} \left(1 + \frac{Y Z}{2} \right) & 1 + \frac{Y Z}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix}$$

Par identification avec (1), en utilisant les notations du paragraphe précédent et après quelques calculs on retire que

$$Z = z \sqrt{1 - \frac{j r}{l \omega}} \sinh \left(j \frac{H \omega}{v} \sqrt{1 - \frac{j r}{l \omega}} \right) \quad ; \quad Y = \frac{2}{z \sqrt{1 - \frac{j r}{l \omega}}} \frac{\cosh \left(j \frac{H \omega}{v} \sqrt{1 - \frac{j r}{l \omega}} \right) - 1}{\sinh \left(j \frac{H \omega}{v} \sqrt{1 - \frac{j r}{l \omega}} \right)}$$

Ligne courte

Les valeurs de Y et Z précédentes sont un peu décevantes dans la mesure où, sauf dans le cas $r = 0$, on ne peut pas les identifier clairement à des composants comme des résistances, des réactance ou des admittances.

Mais par contre si on se place dans le cas des lignes courtes pour lesquelles $H \ll \lambda/4$ alors

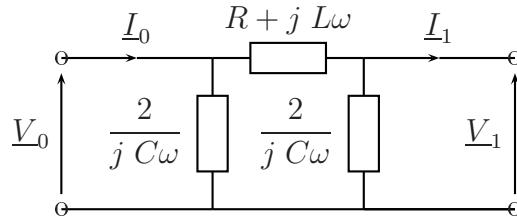
$$\frac{H \omega}{v} \sqrt{1 - \frac{j r}{l \omega}} = 2\pi \frac{H}{\lambda} \sqrt{1 - \frac{j r}{l \omega}} \ll 1$$

et un développement limité à l'ordre 2 des fonctions hyperboliques conduit à

$$Z = r H + j l H \omega \quad ; \quad Y = c H \omega \implies Z = R + j L \omega \quad ; \quad Y = j C \omega$$

où s'introduisent les résistance R , inductance L et capacité C globales de la ligne.

Le schéma électrique en Π équivalent à une ligne courte est donc



Différentes représentations du schéma en Π

On reprend le schéma en Π en X, Y dans lequel on ne spécifie pas les valeurs de l'impédance Z et de l'admittance Y ; l'intérêt est qu'ainsi on peut modifier cette dernière pour lui incorporer un terme de résistance de fuite (on écrit que $Y = j C \omega + \frac{1}{R_{\text{fuite}}}$ qui n'est pas présent dans les analyses qui ont été menées jusqu'ici).

Les équations sont toujours

$$\frac{Y}{2} \underline{V}_0 = \underline{I} - \underline{I}_0 \quad ; \quad \frac{Y}{2} \underline{V}_1 = \underline{I}_0 - \underline{I} \quad ; \quad \underline{V}_0 - \underline{V}_1 = Z \underline{I}$$

Et on constate qu'après avoir éliminé \underline{I} , il ne reste que deux équations linéaires liant les 4 variables \underline{V}_0 , \underline{I}_0 , \underline{V}_1 et \underline{I}_1 .

Suivant l'utilisation du schéma en Π certaines formes d'expression de ces équations sont plus faciles à utiliser que d'autres. Aussi, pour aider, voici le cortège de ces formes équivalentes associées au nom qui leur est généralement donné.

$$\text{Matrice de transfert } \begin{pmatrix} \underline{V}_0 \\ \underline{I}_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 + 2YZ & 4Z \\ Y(4+YZ) & 4 + 2YZ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Matrice impédance } \begin{pmatrix} \underline{V}_0 \\ \underline{V}_1 \end{pmatrix} = \frac{2}{Y(4+YX)} \begin{pmatrix} 2+YZ & 2 \\ 2 & 2+YZ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{I}_0 \\ -\underline{I}_1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Matrice admittance } \begin{pmatrix} \underline{I}_0 \\ -\underline{I}_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2Z} \begin{pmatrix} 2+YZ & -2 \\ -2 & 2+YZ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{V}_0 \\ \underline{V}_1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Matrice hybride } \begin{pmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{I}_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2(2+YZ)} \begin{pmatrix} 4 & -4Z \\ Y(4+YZ) & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{V}_0 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Matrice hybride } \begin{pmatrix} \underline{V}_0 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2(2+YZ)} \begin{pmatrix} 4 & 4Z \\ -Y(4+YZ) & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{I}_0 \end{pmatrix}$$

Des notations plus simples pour le modèle du télégraphiste

Les notations en fonctions hyperboliques à arguments complexes de (1) sont utilisées mais elle ne parlent finalement pas trop à l'entendement, aussi, en incorporant la longueur d'onde et l'impédance caractéristique, propose-t'on les formules

$$\begin{aligned} \cosh\left(\sqrt{j c\omega(r+jl\omega)} H\right) &= \cos\left(2\pi\frac{H}{\lambda}\sqrt{1-j\frac{r}{l\omega}}\right) \\ \sinh\left(\sqrt{j c\omega(r+jl\omega)} H\right) &= j \sin\left(2\pi\frac{H}{\lambda}\sqrt{1-j\frac{r}{l\omega}}\right) \end{aligned}$$

de manière à réécrire (1) comme

$$\begin{pmatrix} \underline{V}_0 \\ \underline{I}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(2\pi\frac{H}{\lambda}\sqrt{1-j\frac{r}{l\omega}}\right) & jz\sqrt{1-j\frac{r}{l\omega}}\sin\left(2\pi\frac{H}{\lambda}\sqrt{1-j\frac{r}{l\omega}}\right) \\ \frac{j}{z\sqrt{1-j\frac{r}{l\omega}}}\sin\left(2\pi\frac{H}{\lambda}\sqrt{1-j\frac{r}{l\omega}}\right) & \cos\left(2\pi\frac{H}{\lambda}\sqrt{1-j\frac{r}{l\omega}}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix}$$

Compléments aux modèles de la ligne électrique bifilaire

Où on complète ce qui a été dit à propos des lignes pour l'adapter à des situations pratiques. Mais attention, ici on va très vite ! C'est juste pour donner une idée de ce que serait un cours plus ample.

Ligne triphasée

Si on donne les quatre domaines de \mathbb{R}^3 : $D_1 = \{x \text{ tel que } (x_1 - X_1)^2 + (x_2 - Y_1)^2 < a^2\}$, $D_2 = \{x \text{ tel que } (x_1 - X_2)^2 + (x_2 - Y_2)^2 < a^2\}$, $D_3 = \{x \text{ tel que } (x_1 - X_3)^2 + (x_2 - Y_3)^2 < a^2\}$ et $D_0 = \{x \notin D_1 \cup D_2 \cup D_3\}$

L'introduction de ce qu'on va convenir d'appeler une ligne triphasée (dans l'espace vide) se traduit alors par la spécification (σ est réel et positif, c'est la conductivité électrique du matériau utilisé pour la ligne)

$$s(x) = \begin{cases} \sigma & \text{si } x \in D_1 \cup D_2 \cup D_3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et le problème de la description en terme de champs de la ligne triphasée consiste à trouver toutes les solutions possibles des équations de Maxwell munies des relations constitutives dans ce cas.

En procédant de façon analogue (et avec l'hypothèse H1) à ce qui a été établi pour la ligne bifilaire, on arrive à définir

- $v_1(x_3, t), v_2(x_3, t), v_3(x_3, t)$ les tensions de phases
- $i_1(x_3, t), i_2(x_3, t), i_3(x_3, t)$ les courants de phases
- $\varphi_1(x_3, t), \varphi_2(x_3, t), \varphi_3(x_3, t)$ les flux magnétiques par unité de longueur de phases
- $q_1(x_3, t), q_2(x_3, t), q_3(x_3, t)$ les charges électriques par unité de longueur de phases.

qui sont liés par

$$\forall n = 1, 2, 3 : -\partial_3 v_n = r i_n + \partial_t \varphi_n ; -\partial_3 i_n = \partial_t q_n$$

Ensuite on utilise l'hypothèse H_2 pour obtenir qu'il existe des liaisons entre d'une part les flux et courants et d'autre part les charges et tensions de la forme

$$\varphi_n = M_{nm} i_m ; q_n = C_{nm} v_m$$

où les relations sont à prendre au sens de la convention d'Einstein pour des tenseurs de premier ordre à trois composantes φ, i, q et v et des tenseurs du second ordre M et C .

Si les trois domaines D_n sont répartis de façon symétrique, par exemple

$$X_n + j Y_n = d \exp^{j 2\pi/3}$$

alors l'analyse des problèmes de magnétostatique permettant d'obtenir les valeurs des M_{nm} et électrostatique permettant d'obtenir les C_{nm} conduit à

$$M_{nm} = (M - M') \delta_{nm} + M' 1_{nm} ; C_{nm} = (C - C') \delta_{nm} + C' 1_{nm}$$

où on note

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{Kroneker}) ; 1_{nm} = 1 \text{ (unité)}$$

Si on ajoute de plus les conditions de régime triphasé équilibré

$$1_{nm} i_m = 0 ; 1_{nm} q_m = 0 ; 1_{nm} \varphi_m = 0 ; 1_{nm} v_m = 0$$

alors on arrive à transformer les liaisons en

$$\forall n = 1, 2, 3 : -\partial_3 v_n = r i_n + (M - M') \partial_t i_n ; -\partial_3 i_n = (C - C') \partial_t v_n$$

qui découpent parfaitement les trois phases en trois équations identiques pour chacunes des phases et permettent de représenter la ligne triphasée équilibrée avec un schéma équivalent de ligne bifilaire.

La terre

Les lignes ont été jusqu'ici considérées comme des objets placés dans un espace vide. Mais évidemment si c'est une idéalisation commode pour introduire les propriétés intrinsèques aux lignes, c'est aussi une situation parfaitement irréaliste. On va maintenant corriger ce défaut d'adéquation avec la réalité en introduisant la notion de « terre. »

Si on reprend la description de la ligne bifilaire au niveau électromagnétique qu'on introduit maintenant un domaine $D_t = \{x \text{ tel que } x_2 < -h\}$ qui figure la présence de la terre au sens littéral alors la conductivité dans l'espace devient

$$s(x) = \begin{cases} \sigma & \text{si } x \in D_+ \cup D_- \\ \sigma_t & \text{si } x \in D_t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Deux questions arrivent tout de suite.

- Quelle est la conductivité de la terre ?

La réponse n'est évidemment pas simple. On retient souvent un ordre de grandeur $\sigma_t \approx 10^{-2} (\Omega m)^{-1}$ mais la nature des matériaux composant le sol peuvent faire varier considérablement cette quantité.

Par exemple la conductivité de l'eau de mer est de $5 (\Omega m)^{-1}$...

- Comment prendre en compte la présence de ce domaine conducteur D_t ?

C'est un problème d'induction électromagnétique qui ne peut pas être développé dans cette présentation rapide des lignes mais dont les conclusions sont qu'en gros le courant électrique de retour par la terre se réparti dans une section suffisamment grande pour que la résistance électrique qu'il rencontre soit négligeable.

En conclusion, l'équation du télégraphiste est également un modèle correct pour décrire une ligne électrique composée d'un seul fil avec retour par la terre.