

Ondes électromagnétiques

G. Vinsard

15 juillet 2009

Propagation unidirectionnelle

Les éléments essentiels à connaître sur les propriétés de l'équation de propagation à une dimension et de ses solutions sont rappelés.

L'équation de propagation unidirectionnelle est

$$\partial_{xx}^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \partial_{tt}^2 \varphi = 0 \quad (1)$$

sa variable est la fonction de deux variables $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; elle est appelée une onde et sa solution générale

$$\varphi(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (2)$$

où $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions d'une variable deux fois différentiables et, à ceci près, quelconques.

Onde monochromatique, progressive et stationnaire

Les parties

$$\varphi_+(x, t) = f(x - ct) \quad \text{et} \quad \varphi_-(x, t) = g(x + ct) \quad (3)$$

de l'onde φ sont appelées des ondes progressives : si le graphe de $f_0 : x \longrightarrow f_0(x) = f(x)$ est donné, $f_t : x \longrightarrow f_t(x) = f(x - ct)$ a le même graphe translaté de ct vers la droite ; en conséquence c est appelée la vitesse de l'onde.

Si

$$\begin{aligned} f(x) &= \Re\{\underline{F} \exp^{2\pi i x/\lambda}\} \quad \lambda \text{ la longueur d'onde} \\ g(x) &= \Re\{\underline{G} \exp^{2\pi i x/\lambda}\} \quad \underline{F} \text{ et } \underline{G} \text{ les amplitudes complexes} \end{aligned} \quad (4)$$

l'onde

$$\varphi(x, t) = \Re\{\underline{F} \exp^{2\pi i (x-ct)/\lambda} + \Re\{\underline{G} \exp^{2\pi i (x+ct)/\lambda}\} \quad (5)$$

est dite monochromatique de fréquence et pulsation temporelles $\nu = c/\lambda$ et $\omega = 2\pi \nu$.

Si $\underline{F} = \underline{G} = |\underline{F}| \exp^{i\psi}$

$$\varphi(x, t) = 2\Re\{\underline{F} \exp^{2\pi i x} \cos \omega t\} = 2|\underline{F}| \cos \omega t \cos(2\pi x/\lambda + \psi) \quad (6)$$

est une onde stationnaire : son graphe de base en espace $2|\underline{F}| \cos(2\pi x/\lambda + \psi)$ est modifié en amplitude seulement par le terme dépendant du temps $\cos \omega t$.

Le système propagatif du 1^o ordre

En posant

$$u = \frac{1}{\epsilon_0} \partial_x \varphi \quad ; \quad i = -\partial_t \varphi \implies \epsilon_0 \partial_t u = -\partial_x i \quad (7)$$

l'équation de propagation (1) s'écrit alors

$$\epsilon_0 \partial_x u = \frac{1}{c^2} \partial_t i \implies \partial_x u = -\mu_0 \partial_t i \quad \text{si } \epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} \quad (8)$$

et donc elle peut être mise sous la forme d'un système d'ordre 1

$$\begin{cases} \partial_x u &= -\mu_0 \partial_t i \\ \partial_x i &= -\epsilon_0 \partial_t u \end{cases} \quad (9)$$

qui est exactement celui de l'équation du télégraphiste sans perte.

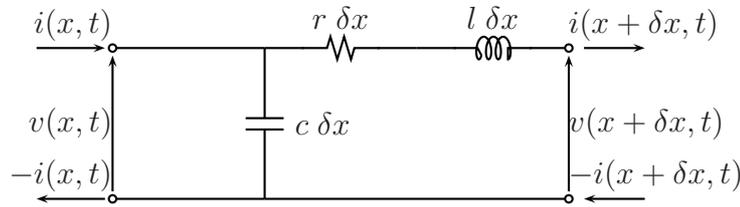
Étude de l'équation du télégraphiste

Un fil rectiligne conducteur de l'électricité connecté à l'une de ses extrémités (en $x = 0$) à une des bornes d'un générateur de tension parfait $e(t)$ dont l'autre borne est reliée à la terre, l'autre extrémité du fil (en $x = L$) n'étant reliée à rien est considéré. Appelons cet objet une ligne électrique.

En chaque abscisse x et à chaque instant il y a un courant électrique $i(x, t)$ dirigé vers les x croissants ; et il y a aussi une tension $u(x, t)$ mesurée par rapport à la terre (qui elle reste au potentiel 0, c'est d'ailleurs à cela qu'on la reconnaît).

Quand on passe de x à $x + \delta x$, le courant et la tension passent de $i(x, t)$ et $u(x, t)$ à $i(x + \delta x, t) \approx i(x, t) + \partial_x i(x, t) \delta x$ et $u(x + \delta x, t) \approx u(x, t) + \partial_x u(x, t) \delta x$.

La modélisation de la ligne consiste à affirmer¹ qu'entre les deux points x et $x + \delta x$, il y a une résistance électrique $r \delta x$ et une inductance $l \delta x$ en série puis qu'entre le point x et la terre il y a une capacité $c \delta x$, où r , l et c sont des résistance, inductance et capacité par unité de longueur.



Il vient alors

$$\begin{aligned} u(x, t) - u(x + \delta x, t) &= r \delta x i(x + \delta x, t) + l \delta x \partial_t i(x + \delta x, t) \\ c \delta x \partial_t u(x, t) &= i(x, t) - i(x + \delta x, t) \end{aligned} \quad (10)$$

soit, après avoir développé en δx , négligé les termes d'ordre supérieurs à 1 et posé $i = i(x, t)$, $u = u(x, t)$

$$\begin{aligned} \partial_x u &= -ri - l \partial_t i \\ \partial_x i &= -c \partial_t u \end{aligned} \quad (11)$$

équations auxquelles on ajoute les conditions aux limites

$$u(0, t) = e(t) \quad ; \quad i(L, t) = 0 \quad (12)$$

et une condition initiale qu'on choisit comme $i(x, 0) = 0$.

Dans le cas où $r = 0$, l'équation devient

$$\begin{aligned} \partial_x u &= -l \partial_t i \\ \partial_x i &= -c \partial_t u \end{aligned} \quad (13)$$

qui est exactement (9) en identifiant μ_0 avec l puis ϵ_0 avec $1/c$. C'est qui est légitime du point de vue des dimensions puisque l et c sont des H/m et F/m comme μ_0 et ϵ_0 .

Ping

La recherche d'une solution de (13), (12) qui aurait la forme d'une onde progressive

$$i(x, t) = f(x - vt) \quad (14)$$

amène à la conclusion qu'il est déjà nécessaire que

$$lcv^2 = 1 \quad (15)$$

¹Démonstration dans le texte compagnon : l'équation du télégraphiste de la ligne bifilaire dans le vide.

et alors

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{l}{c}} f(x - vt) \quad (16)$$

Les conditions aux limites (12) demandent

$$f(-v t) = \sqrt{\frac{c}{l}} e(t) \quad (17)$$

ce qui détermine f , puis que

$$e(t - L/v) = 0 \quad (18)$$

qui constitue une condition sur la source e remplie si

$$\{t < 0 \implies e(t) < 0\} \text{ et } \{t < L/v\} \quad (19)$$

la solution est alors de la forme

$$u(x, t) = e(t - x/v) \quad ; \quad i(x, t) = \sqrt{\frac{c}{l}} e(t - x/v) \quad (20)$$

c'est à dire que

- la tension $u(x, t)$ est la tension $u(0, t) = e(t)$ avec un retard de x/v ;
- le courant $i(x, t)$, se déduit de $u(x, t)$ par division par

$$z = \sqrt{\frac{l}{c}} \text{ qui est homogène à une résistance et s'appelle l'impédance caractéristique} \quad (21)$$

la tension $e(t)$ est la *source d'émission* de cette onde progressive.

Toujours quand $t < L/v$, la quantité

$$p_0(t) = e(t) i(0, t) \quad (22)$$

est la puissance que doit pouvoir fournir le générateur de tension parfait pour rester un générateur de tension parfait alors qu'il est connecté à la ligne ; il vient

$$p_0(t) = \frac{e(t)^2}{z} \quad (23)$$

c'est à dire la même expression que si le générateur débitait son courant dans une résistance z . La puissance électrique instantanée en un point x est

$$p(x, t) = u(x, t) i(x, t) \quad (24)$$

et alors

$$p(x, t) = p_0(t - x/v) \quad (25)$$

La puissance en un point x et un instant t est égale à la puissance en $x = 0$ retardée de x/v .

exercice : Comment changer la condition aux limites en $x = L$ pour que ce qui vient d'être calculé reste valable à tout temps. Pourquoi parle-t-on de bouchons 50Ω pour fermer les prises BNC ?

-pong

L'analyse précédente est un peu insuffisante en ce que sauf condition limite particulière en $x = L$ elle ne produit qu'une solution valable pour $t < L/v$. C'est suffisant pour une ligne infinie ($L = \infty$) mais pas pour une ligne finie.

On propose de compléter cette analyse dans le cas du problème

$$\begin{cases} \partial_x u &= -l \partial_t i \\ \partial_x i &= -c \partial_t u \end{cases} \text{ avec } u(0, t) = e(t) \text{ et } i(L, t) = Z i(L, t)$$

où le courant terminal (en $x = L$) est lié linéairement à la tension (terminale) par Z un coefficient homogène à une résistance.

Z peut représenter une véritable résistance placée en bout de ligne mais aussi bien d'autres choses. Par exemple une ligne infinie placée au bout de la ligne finie qu'on propose d'étudier : et alors le cas $Z = z$ correspond à celui d'une ligne infinie dont on ne considère que le tronçon $[0, L]$. Le cas $Z = \infty$ correspond à la condition aux limites $i(L, t) = 0$ et le cas $Z = 0$ à $u(L, t) = 0$.

Pour comprendre l'analyse qui suit il faut remarquer :

1. Si $u(x, t) = z f(x - vt)$; $i(x, t) = f(x - vt)$ sont solutions de $\partial_x u = -l \partial_t i$; $\partial_x i = -c \partial_t u$ alors $u(x, t) = z f(x + vt)$; $i(x, t) = -f(x + vt)$ aussi ;
2. toutefois les solutions $u(x, t) = z f(x + vt)$; $i(x, t) = -f(x + vt)$ appliquée aux conditions aux limites $u(0, t) = e(t)$ et $i(L, t) = 0$ conduisent à des conditions sur la tension source e inacceptables ;
3. Par contre si on avait donnée des conditions aux limites de la forme $u(L, t) = e(t)$ et $i(0, t) = 0$ c'est plutôt ces dernières solution qui auraient été acceptables et les premières inacceptables.

En fait les solutions de la forme $u(x, t) = z f(x + vt)$; $i(x, t) = -f(x + vt)$ peuvent s'écrire

$$u(-(-x), t) = z f(-((-x) - vt)) \quad ; \quad -i(-(-x), t) = f(-((-x) - vt))$$

c'est à dire sous la forme d'une onde qui se propage dans la direction des x décroissants.

La question de la recherche d'une solution complète consiste déjà à comprendre quelle est la source d'émission des ondes qui se propagent dans le sens des x décroissants.

Pour $t < L/v$ et dans le cas où $t < 0 \implies e(t) < 0$, comme on l'a déjà indiqué auparavant, la solution complète est : $u(x, t) = e(t - x/v)$; $i(x, t) = 1/z e(t - x/v)$ avec $z = \sqrt{l/c}$; elle respecte bien $u(L, t) = Z i(L, t)$ puisque la tension et le courant sont nuls.

Pour $t > L/v$ on a conflit entre la solution précédente pour laquelle $u(L, t) = z i(L, t)$ alors que la condition aux limites demande $u(L, t) = Z i(L, t)$.

La résolution de ce conflit se fait en supposant qu'une onde se propageant dans la direction des x négatifs est créée à partir de $t = L/v$ et se superpose à la première onde.

Ainsi pour $t > l/v$ (et $t < 2l/v$ comme on le voit plus loin) on a une solution de la forme

$$u(x, t) = e(t - x/v) + z g(x + vt) \quad ; \quad i(x, t) = 1/z e(t - x/v) - g(x + vt)$$

où on trouve g en demandant que la condition aux limites en $x = L$ soit satisfaite soit

$$e(t - L/v) + z g(L + vt) = Z(1/z e(t - L/v) - g(L + vt))$$

d'où

$$g(y) = \frac{Z - z}{Z + z} \frac{1}{z} e\left(\frac{y - 2L}{v}\right)$$

ce qui donne la solution, valable pour $0 < t < 2L/v$,

$$u(x, t) = e\left(t - \frac{x}{v}\right) + \frac{Z - z}{Z + z} e\left(t - \frac{L}{v} - \frac{L - x}{v}\right) \quad ; \quad i(x, t) = \frac{1}{z} \left(e\left(t - \frac{x}{v}\right) - \frac{Z - z}{Z + z} e\left(t - \frac{L}{v} - \frac{L - x}{v}\right) \right)$$

On remarque que

- Si $Z \rightarrow \infty$ (la ligne est à vide) le coefficient multiplicateur, appelons le le coefficient de réflexion, $(Z - z)/(Z + z)$ de l'onde qui se crée pour que la condition en $x = L$ soit respectée vaut 1 ; cette onde, appelons là l'onde réfléchi, est l'exacte réplique de l'onde première, appelons là l'onde incident, mais se déplaçant en sens inverse.
- Si $Z = z$ on retrouve le résultat de l'exercice sur le circuit bouchon ; tout se passe comme si la ligne était indéfinie ;
- Si $Z = 0$ (la ligne est en court-circuit) le coefficient de réflexion est -1.

Si maintenant on veut encore compléter la solution pour qu'elle devienne valable au delà de $t = 2L/v$ il faut accepter qu'une onde se propageant dans le sens des x positifs est créée au delà de ce temps : elle a la forme $h(t - 3L/v - x/v)$.

On peut déterminer h en exigeant que la condition à la limite $u(0, t) = e(t)$ soit respecté. Tous calculs faits on trouve la solution valable pour $0 < t < 3L/v$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= e\left(t - \frac{x}{v}\right) + \frac{Z - z}{Z + z} \left(e\left(t - \frac{2L}{v} + \frac{x}{v}\right) - e\left(t - \frac{2L}{v} - \frac{x}{v}\right) \right) \\ i(x, t) &= \frac{1}{z} \left(e\left(t - \frac{x}{v}\right) - \frac{Z - z}{Z + z} \left(e\left(t - \frac{2L}{v} + \frac{x}{v}\right) + e\left(t - \frac{2L}{v} - \frac{x}{v}\right) \right) \right) \end{aligned}$$

et en continuant indéfiniment cette analyse la solution générale est pour tout temps et si $t < 0 \implies e(t) = 0$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= e\left(t - \frac{x}{v}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{Z - z}{Z + z} \right)^n \left(e\left(t - \frac{2nL}{v} - \frac{x}{v}\right) - e\left(t - \frac{2nL}{v} + \frac{x}{v}\right) \right) \\ i(x, t) &= \frac{1}{z} \left(e\left(t - \frac{x}{v}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{Z - z}{Z + z} \right)^n \left(e\left(t - \frac{2nL}{v} - \frac{x}{v}\right) + e\left(t - \frac{2nL}{v} + \frac{x}{v}\right) \right) \right) \end{aligned}$$

Cette solution peut-être exploitée pour définir le comportement d'une ligne soumise à une tension source et comportant une charge résistive Z a son autre extrémité.

Mais ce ne sera pas fait ici où l'objectif était juste d'introduire la partie de ping-pong entre émission (en $x = 0$) et réflexion en $x = L$.

exercice : calculer l'énergie totale évacuée par la résistance Z dans le cas où $e(t) = 0$ si $t > 2L/v$. Que ce passe-t-il si cette dernière condition n'est pas remplie ?

Invariance par transformation de Lorentz

Si les variables x' et t' repèrent d'espace et le temps dans un référentiel en translation uniforme à la vitesse v par rapport à celui où l'espace et le temps sont repérées par x et t alors les relations de changement de référentiel appelée « transformation de Lorentz » s'écrivent

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \quad , \quad t' = \gamma\left(t - \frac{xv}{c^2}\right) \quad , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \iff x &= \gamma(x' + vt') \quad , \quad t = \gamma\left(t' + \frac{x'v}{c^2}\right) \end{aligned} \quad (26)$$

La fonction

$$\begin{aligned} \varphi'(x', t') \quad \text{telle que} \quad \varphi'\left(\gamma(x - vt), \left(t - \frac{xv}{c^2}\right)\right) &= \varphi(x, t) \\ \iff \varphi(x', t') &= \varphi\left(\gamma(x' + vt'), \left(t' + \frac{x'v}{c^2}\right)\right) \end{aligned} \quad (27)$$

est solution de

$$\partial_{x'x'}^2 \varphi' - \frac{1}{c^2} \partial_{t't'}^2 \varphi' = 0 \quad (28)$$

l'identité de forme entre (1) et (28) est la raison pour laquelle l'équation de propagation est dite invariante par transformation de Lorentz.

Éléments minimaux de relativité restreinte

Dans le référentiel \mathcal{R} la position et le temps sont repérés par les variables x et t ; dans le référentiel \mathcal{R}' en translation uniforme (de vitesse v) par rapport au référentiel \mathcal{R} si les position et temps y sont repérés par les variables x'' et t'' qui *a priori* sont liées à x et t par

$$x'' = x - vt \quad ; \quad t'' = t \quad (29)$$

Et donc dans ce cas la fonction φ''

$$\varphi''(x'', t) \quad \text{telle que} \quad \varphi''(x - vt, t) = \varphi(x, t) \quad (30)$$

représente dans le référentiel \mathcal{R}' la même chose que ce que la fonction φ représente dans le référentiel \mathcal{R} .

Si φ est solution de (1) et donc de la forme (2) alors directement

$$\varphi''(x'', t'') = f(x'' - (c - v) t'') + g(x'' + (c + v) t'') \quad (31)$$

où, ce qui revient au même, φ'' est solution de ((31) est solution des (32))

$$\partial_{x''x''}^2 \varphi'' - \frac{2v}{c^2 - v^2} \partial_{x''t''} \varphi'' - \frac{1}{c^2 - v^2} \partial_{t''t''}^2 \varphi'' = 0 \quad (32)$$

Si φ représente par exemple une onde acoustique, ces résultats sont physiquement satisfaisants : si une onde progressive se propage à la vitesse c dans un référentiel \mathcal{R} alors elle se propagera à la vitesse $c - v$ dans le référentiel \mathcal{R}' et en particulier il existe « mur du son » pour $v = c$.

Par contre si φ représente une onde lumineuse, les résultats sont cette fois en contradiction avec les expériences qui montrent que si une telle onde se propage à la vitesse c dans un référentiel, alors elle se propagera à la même vitesse c dans tout référentiel en translation uniforme par rapport au premier.

Il faut donc admettre que les relations liant les variables repérant la position et la vitesse dans deux référentiels en translation ne sont pas (29) mais plutôt (26). C'est l'hypothèse de la théorie de la relativité restreinte.

exercice : Calculer la variation de fréquence due à l'effet Doppler classique, puis relativiste.

Production d'onde électromagnétique : le dipôle élémentaire de Hertz

Différents résultats sur les propriétés de l'onde électromagnétique d'un dipôle élémentaire de Hertz

Équations des ondes électromagnétiques

Dans un milieu de perméabilité magnétique μ_0 et de permittivité diélectrique ϵ_0 constante, en utilisant la jauge de Lorentz

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} + \frac{1}{c^2} \partial_t \varphi = 0 \quad (33)$$

les potentiels vecteur \vec{a} et scalaire φ sont solutions de

$$\begin{cases} -\square \vec{a} + \mu_0 \vec{j} = \vec{0} \\ -\square \varphi + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \end{cases} \quad (34)$$

où les densités de courant et de charges sont des données. Les champs magnétique et électrique se déduisent des potentiels par

$$\vec{h} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{a} \quad ; \quad \vec{e} = -\partial_t \vec{a} - \vec{\nabla} \varphi \quad (35)$$

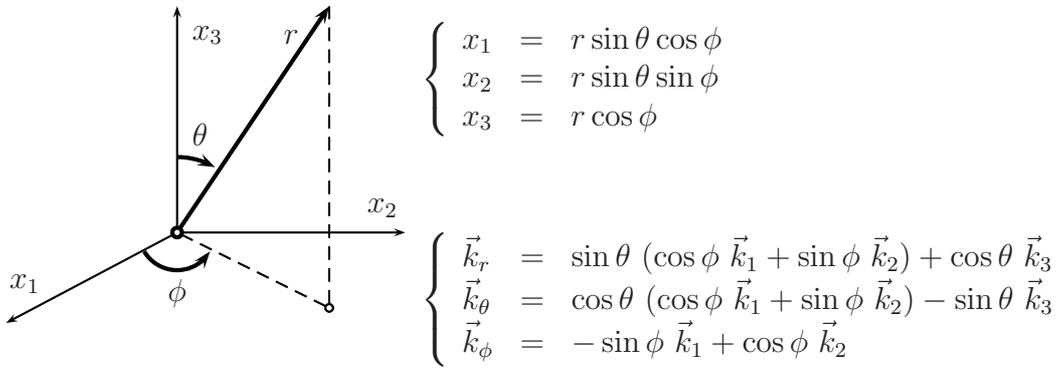
et sont les solutions du système de 1^o ordre

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{e} &= -\mu_0 \partial_t \vec{h} \quad ; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{e} + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{h} &= \epsilon_0 \partial_t \vec{e} + \vec{j} \end{aligned} \quad (36)$$

Et finalement, celles des solutions de (1)–(2) qui s'annulent à l'infini sont connues, elles sont de la forme (potentiels retardés)

$$\vec{a}(t, \vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{E_3} \frac{\vec{j} \left(t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c}, \vec{y} \right)}{|\vec{x} - \vec{y}|} d\vec{y}^3 \quad ; \quad \varphi(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{E_3} \frac{\rho \left(t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c}, \vec{y} \right)}{|\vec{x} - \vec{y}|} d\vec{y}^3 \quad (37)$$

Il sera nécessaire d'effectuer des manipulations sur les coordonnées par la suite, les notations utilisées seront alors conformes à celles du dessin :



Onde produite par un dipôle élémentaire de Hertz

Un courant électrique parcourt un brin de fil de longueur L à section circulaire de rayon d , les sources sont alors

$$\begin{aligned} \vec{j}(t, \vec{x}) &= i(t) \vec{k}_3 \begin{cases} 1/(\pi d^2) & \text{si } x_1^2 + x_2^2 < d^2 \text{ et } -L/2 < x_3 < L/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ \rho(t, x) &= q(t) (\delta(\vec{x}, L/2) - \delta(\vec{x}, -L/2))/(\pi d^2) \end{aligned} \quad (38)$$

où

– $\delta(\vec{x}, u)$ est la distribution de Dirac définie par : si ψ est une fonction test scalaire définie sur E_3

$$\forall \psi : \int_{E_3} \psi(\vec{x}) \delta(\vec{x}, u) dx^3 = \begin{cases} \psi(x_1 \vec{k}_1 + x_2 \vec{k}_2 + u \vec{k}_3) & \text{si } x_1^2 + x_2^2 < d^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (39)$$

– le courant i le long du brin de fil et la charge électrique q des deux extrémités du brin sont liés par

$$\frac{dq}{dt} = i \quad (40)$$

de manière que la condition nécessaire à ce que la jauge de Lorentz (1) soit réalisée, i.e.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \partial_t \rho = 0 \quad (41)$$

– avec le passage à la limite $d, L \rightarrow 0$ lors du calcul des potentiels.

Bien entendu un tel système, qui peut être appelé « dipôle élémentaire de Hertz » n'est concevable que sur le papier : toutefois des antennes existant réellement peuvent être approchés par la superposition de dipôles élémentaires de Hertz et il se trouvent qu'elles ont un comportement très voisin de celui de leur composant élémentaire.

L'injection de (6) dans (5) avec prise en compte de (8) conduit à l'expression des potentiels

$$|\vec{x}| \gg L, d \implies \vec{a}(t, \vec{x}) \approx \frac{\mu_0 L}{4\pi} i \left(t - \frac{|\vec{x}|}{c} \right) \frac{\vec{k}_3}{|\vec{x}|} ; \quad \varphi(t, \vec{x}) \approx \frac{L}{4\pi\epsilon_0} (\vec{x} \cdot \vec{k}_3) \left(\frac{q \left(t - \frac{|\vec{x}|}{c} \right)}{|\vec{x}|^3} + \frac{i \left(t - \frac{|\vec{x}|}{c} \right)}{c |\vec{x}|^2} \right) \quad (42)$$

Ces approximations satisfont exactement la jauge de Lorentz (1). Elles comportent des termes qui peuvent se classer en puissances croissantes de $1/|\vec{x}|$, suffisamment loin de l'origine la puissance la plus faible domine les autres et donc il est intéressant d'introduire l'approximation (qui ne satisfait cette fois la jauge de Lorentz plus qu'à l'ordre 1) qui consiste à ne retenir que les termes d'ordre 1 en $1/|\vec{x}|$ soit

$$\vec{a}(t, \vec{x}) \approx \frac{\mu_0 L}{4\pi} i \left(t - \frac{|\vec{x}|}{c} \right) \frac{\vec{k}_3}{|\vec{x}|} ; \quad \varphi(t, \vec{x}) \approx \frac{L}{4\pi\epsilon_0} (\vec{x} \cdot \vec{k}_3) \frac{i \left(t - \frac{|\vec{x}|}{c} \right)}{c |\vec{x}|^2} \quad (43)$$

L'injection de cette expression dans (3) (toujours en éliminant lors du calcul les termes d'ordre supérieur à 1 en $1/|\vec{x}|$) donne l'expression des champs magnétique et électrique

$$\vec{h}(t, \vec{x}) \approx -\frac{L}{4\pi} \frac{di}{c dt} \left(t - \frac{|\vec{x}|}{c} \right) \frac{\vec{x} \times \vec{k}_3}{|\vec{x}|^2} ; \quad \vec{e}(t, \vec{x}) \approx -\frac{\mu_0 L}{4\pi} \frac{di}{dt} \left(t - \frac{|\vec{x}|}{c} \right) \frac{1}{|\vec{x}|} \left(\vec{k}_3 - \frac{\vec{k}_3 \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|^2} \vec{x} \right) \quad (44)$$

Les potentiels (11) ou les champs (12) sont les approximation de l'onde électromagnétique émise par dipôle élémentaire de Hertz : ces approximations sont valables « au loin » c'est à dire quand $|\vec{x}| \gg d, L$.

exercice : Il était un peu inutile d'introduire la dimension d dans la définition du courant élémentaire du dipôle de Hertz. Réécrire une définition en utilisant une fonction de Dirac *ad hoc*.

Ondes planes

L'onde « au loin » du doublet de Hertz peut encore être approximée : si

$$\vec{x} = X \vec{k}_1 + \delta\vec{x} \text{ avec } |\vec{x}| \ll X \text{ i.e. } |X \vec{k}_1 + \delta\vec{x}| \approx X + \delta x_1 \text{ à l'ordre 1 en } |\delta\vec{x}| \quad (45)$$

alors les champs magnétique et électrique deviennent

$$\vec{h}(t, X \vec{k}_1 + \delta\vec{x}) \approx \frac{L}{4\pi c X} \frac{di}{dt} \left(t - \frac{X}{c} - \frac{\delta x_1}{c} \right) \vec{k}_2 \quad ; \quad \vec{e}(t, X \vec{k}_1 + \delta\vec{x}) \approx -\frac{\mu_0 L}{4\pi X} \frac{di}{dt} \left(t - \frac{X}{c} - \frac{\delta x_1}{c} \right) \vec{k}_3 \quad (46)$$

et donc ne dépendent plus que de δx_1 la coordonnée selon la direction \vec{k}_1 de $\delta\vec{x}$.

Si donc

$$f(x) = \frac{L}{4\pi c X} \frac{di}{dt} \left(x - \frac{X}{c} \right) \quad (47)$$

et

$$\begin{cases} \vec{h}'(t, \vec{x}') = f\left(t - \frac{x'_1}{c}\right) \vec{k}_2 \\ \vec{e}'(t, \vec{x}') = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} f\left(t - \frac{x'_1}{c}\right) \vec{k}_3 \end{cases} \quad (48)$$

alors

$$\vec{h}(t, X \vec{k}_1 + \delta\vec{x}) \approx \vec{h}'(t, \delta\vec{x}) \quad ; \quad \vec{e}(t, X \vec{k}_1 + \delta\vec{x}) \approx \vec{e}'(t, \delta\vec{x}) \quad (49)$$

et finalement (16) apparaît comme une approximation locale au voisinage de $X\vec{k}_1$ de l'onde (12) ; sa forme est particulièrement simple :

- les champs magnétique et électrique ont une direction fixe (le premier \vec{k}_2 , le second \vec{k}_3) ;
- leurs valeurs ne dépendent pas des coordonnées x'_2 et x'_3 ;
- leurs valeurs à la coordonnée x'_1 et au temps t sont celles qu'ils avaient à la coordonnée 0 et au temps $t - x'_1/c$; il y a donc propagation dans la direction \vec{k}_1 .
- le rapport entre les amplitudes des champs électrique (V/m) et magnétique (A/m) est une quantité fixe

$$\nu_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \quad (50)$$

appelée l'impédance caractéristique du vide (elle est homogène à un Ω).

Une onde qui possède ces propriétés est appelée une onde plane. La considération de ce type d'onde permet de déduire de grandes et belles chose mais il ne faut cependant pas oublier que l'onde plane n'a d'existence que comme approximation locale d'une onde plus compliquée.

Notamment une onde plane est certes solution de (1)–(2) mais c'est une solution qui ne se met pas sous la forme (5) puisqu'elle n'a pas la propriété de s'annuler à l'infini : elle n'a en somme ni commencement, ni fin.

exercice : Il aurait été également possible d'introduire l'onde plane en utilisant une multitude de dipôles de Hertz convenablement répartis. Le faire.

Puissance rayonnée

Reprenons l'onde (12) dans le but de déterminer la puissance qu'il faut fournir pour faire passer un courant i dans le fil. Cette puissance contribue à augmenter l'énergie électromagnétique dans tout l'espace et donc si cette énergie est

$$W(t) = \int_{E_3} \left(\frac{1}{2} \mu_0 (\vec{h}(t, \vec{x}))^2 + \frac{1}{2} \epsilon_0 (\vec{e}(t, \vec{x}))^2 \right) d\vec{x}^3 \quad (51)$$

la puissance instantanée sera

$$p(t) = \frac{dW}{dt}(t) \quad (52)$$

Il n'est pas possible d'appliquer *verbatim* cette façon de procéder parce que (12) ne donne les expressions de \vec{e} et \vec{h} qu'à des distances où $|\vec{x}|$ est très grand. Par contre en introduisant une sphère de rayon R centrée sur l'origine et en notant

$$D(R) = \{\vec{x} \in E_3 \text{ tq } |\vec{x}| > R\} \quad (53)$$

l'extérieur de cette sphère alors la partie de l'énergie électromagnétique totale (21) contenue dans D est

$$W_D(t, R) = \int_{D(R)} \left(\frac{1}{2} \mu_0 (\vec{h}(t, \vec{x}))^2 + \frac{1}{2} \epsilon_0 (\vec{e}(t, \vec{x}))^2 \right) d\vec{x}^3 \quad (54)$$

Si $R \gg L, d$ alors les expressions (12) de \vec{e} et \vec{h} peuvent être utilisées dans $D(R)$ et donc tous calculs faits

$$W_D(t, R) = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{L^2}{(2\pi)^2 c} \int_R^\infty \left(\frac{di}{dt} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right)^2 dr \quad (55)$$

Il y a exactement la même énergie dans $D(t + \Delta t, R)$ que dans $D(t, R - c \Delta t)$, ce qui porte à penser que la densité d'énergie se propage radialement à la vitesse c et qu'alors l'énergie (19)

$$W(t) = W_D(t, 0) \quad (56)$$

de cette façon la puissance rayonnée par le dipôle élémentaire de Hertz à l'instant t est

$$P(t) = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{L^2}{(2\pi c)^2} \left(\frac{di}{dt}(t) \right)^2 \quad (57)$$

Et donc pour rayonnement monochromatique

$$i(t) = \sqrt{2} \Re \{ \underline{I} \exp^{i\omega t} \} \quad (\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}) \implies P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{L^2}{(cT)^2} |\underline{I}|^2 \quad (58)$$

ce qui permet d'exprimer la « résistance de rayonnement »

$$R_{\text{ray}} = \frac{2\pi}{3} \nu_0 \left(\frac{L}{\lambda} \right)^2 \quad (59)$$

où s'introduit la longueur d'onde $\lambda = c T$ ainsi que l'impédance caractéristique du vide.

Même si comme cela a été indiqué plus haut le doublet élémentaire de Hertz est une idéalisation d'antenne, le concept de résistance de rayonnement se transpose à des antennes réalisables et il permet de savoir quelle tension appliquer pour obtenir une puissance donnée.

exercice : Comment interpréter la forme de la dépendance de la résistance d'antenne en fonction de la longueur L du dipôle ?

Direction de rayonnement

Le rayonnement du dipôle élémentaire de Hertz se fait radialement mais pas de façon isotrope. Pour mettre ceci en évidence commodément il est intéressant d'introduire le vecteur de Poynting. En partant de

$$\frac{dW_D}{dt} = \int_{D(R)} \left(\mu_0 \vec{h}(t, \vec{x}) \cdot \partial_t \vec{h}(t, \vec{x}) + \epsilon_0 \vec{e}(t, \vec{x}) \cdot \partial_t \vec{e}(t, \vec{x}) \right) d\vec{x}^3 \quad (60)$$

par injection directe des relations de Maxwell-Faraday, de Maxwell-Ampère, diélectrique et magnétique, en tenant compte de ce que D ne comporte aucune source, il vient

$$\frac{dW_D}{dt} = \int_{D(R)} \left(-\vec{h}(t, \vec{x}) \cdot \vec{\nabla} \times \vec{e}(t, \vec{x}) + \vec{e}(t, \vec{x}) \cdot \vec{\nabla} \times \vec{h}(t, \vec{x}) \right) d\vec{x}^3 \quad (61)$$

et donc en utilisant successivement la relation d'analyse vectorielle $\vec{\nabla} \cdot (\vec{h} \times \vec{e}) = \vec{e} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{h} - \vec{h} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{e}$ et le théorème de Green-Ostrogradsky

$$\frac{dW_D}{dt} = \int_{\partial D(R)} \vec{h}(t, \vec{x}) \times \vec{e}(t, \vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) d\vec{x}^2 \quad (62)$$

où $\partial D(R) = \{\vec{x} \text{ tq } \vec{x}^2 = R^2\}$ est le bord de $D(R)$ et $\vec{n}(\vec{x}) = -\vec{x}/|\vec{x}|$ la normale sortante à ce bord. $\frac{dW_D}{dt}$ est la puissance entrant dans W_D à l'instant t , aussi peut-on accepter l'idée que le vecteur de Poynting

$$s(\vec{x}, t) = \vec{e}(\vec{x}, t) \times \vec{h}(\vec{x}, t) \quad (63)$$

soit tel que sa densité de flux sur une surface

$$p = s(\vec{x}, t) \cdot \vec{n} \quad (64)$$

représente la densité de puissance sortant par cette surface et donc que cette expression algébrique quantifie la répartition de la puissance rayonnée totale par rapport aux directions.

En appliquant cela à la puissance sortant du complémentaire de $D(R)$ (qui est l'inverse de la puissance entrant dans $D(R)$ et conduit à un changement de signe de la normale), il vient, toujours en utilisant (12) ainsi que les coordonnées sphériques définies au début de la leçon

$$p(\theta, \phi, t) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{L^2}{(2\pi c)^2} \left(\frac{di}{dt}(t - R/c) \right)^2 \frac{(\sin \theta)^2}{R^2} \quad (65)$$

dont l'intégrale sur le bord de la sphère est bien sûr la puissance totale (25)

$$\int_0^{2\pi} R d\phi \int_0^\pi R \sin \theta d\theta p(\theta, \phi, t) = P(t) \quad (66)$$

et qui indique que la puissance rayonnée ne dépend pas de la composante suivant ϕ (ce qui est cohérent avec la symétrie axisymétrique du dipôle) et dépend de $\sin \theta$: donc c'est principalement dans les directions orthogonales à la direction \vec{k}_3 que rayonne le dipôle élémentaire de Hertz.

exercice : Comment disposer des dipôles de Hertz afin d'obtenir une meilleure directivité d'antenne ?

Émission et réception

Si un brin de géométrie identique à celui qui a été décrit pour définir le dipôle élémentaire de Hertz est situé à la position \vec{x} et est dirigé suivant une direction \vec{k} ; si ce brin est fait d'un matériau conducteur de l'électricité qui impose la loi d'Ohm en tous points du brin, alors le courant induit sera

$$\vec{j}_i(t, \vec{x}) = \sigma (\vec{e}(t, \vec{x}) + \vec{e}_i(t, \vec{x})) \quad (67)$$

où \vec{e} est le champ électrique (12) et \vec{e}_i est le champ électrique induit dans le brin. Dans le cas limite où le brin est fait d'un matériau très conducteur alors

$$\sigma \longrightarrow \infty \text{ et } |\vec{j}_i| < \infty \implies \vec{e}_i(t, \vec{x}) = -\vec{e}(t, \vec{x}) \quad (68)$$

le champ électrique induit est connu dans le brin : il s'oppose au champ source et crée donc une différence de potentiel entre les deux extrémités du brin qui peut servir de signal d'entrée à un récepteur.

Quantitativement cette différence de potentiel est (le champ électrique ne varie presque pas sur la longueur du brin)

$$V \approx \vec{e}_i \cdot L\vec{k} = -\frac{\mu_0 L^2}{4\pi} \frac{di}{dt} \left(t - \frac{|\vec{x}|}{c} \right) \frac{(\vec{x} \times \vec{k}_3) \cdot (\vec{x} \times \vec{k})}{|\vec{x}|^3} \quad (69)$$

Comme c'était prévisible, elle est maximale pour \vec{k} aligné à \vec{k}_3 et \vec{x} orthogonal à \vec{k}_3 et elle décroît en l'inverse de la distance qui sépare les deux brins.

exercice : Une formule pratique utilisée dans une norme propose déterminer l'intensité du champ électrique « au loin » dû au rayonnement d'une antenne est

$$\text{Champ électrique en V/m} = \underbrace{7}_{\text{en } \sqrt{\text{d'Ohm}}} \frac{\sqrt{\text{Puissance effective rayonnée en W}}}{\text{distance à l'antenne en m}}$$

cette formule est-elle compatible avec (69) ?

L'onde plane : quelques éléments à connaître

Des solutions possibles des équations de Maxwell sans sources

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{h} &= \partial_t \vec{d} & ; & \vec{b} = \mu \vec{h} \\ \vec{\nabla} \times \vec{e} &= -\partial_t \vec{b} & ; & \vec{d} = \epsilon \vec{e} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{b} &= 0 & ; & \vec{\nabla} \cdot \vec{d} = 0 \end{aligned}$$

sans trop s'inquiéter de savoir ce qui produit ces solutions sont, dans le cas où μ et ϵ sont uniformes dans tout l'espace, de la forme

$$\vec{h} = h_1(x_3, t) \vec{e}_1 \quad \text{et} \quad \vec{e} = e_2(x_3, t) \vec{e}_2 \quad (70)$$

où

$$\partial_3 h_1 = \epsilon \partial_t e_2(x_3, t) \quad \text{et} \quad \partial_3 e_2 = \mu \partial_t h_1(x_3, t) \quad (71)$$

Les champs magnétique et électrique solutions de ce problème en tous points identiques à celles du problème de la ligne électrique (voir texte sur la propagation en général) : ils forment ce qui est appelé une onde plane.

Il y a un inconvénient à utiliser l'onde plane. Elle n'existe pas ! En effet elle correspondrait par exemple à une énergie infinie, ce qui est quand même une bonne raison pour qu'elle n'est jamais été créée. Mais par contre elle peut être utilisée comme forme approximative d'une onde qui existe effectivement (voir le paragraphe *ad hoc* dans le texte sur le dipôle de Hertz) et c'est ainsi qu'il faut l'appréhender : comme un intermédiaire pratique.

Propagation, réflexion et transmission en incidence normale

L'espace est partagé en deux milieux, les permittivité diélectrique et perméabilité magnétique sont alors des fonctions de l'espace comme

$$\epsilon(\vec{x}) = \begin{cases} \epsilon_- & \text{si } x < 0 \\ \epsilon_+ & \text{sinon} \end{cases} ; \mu(\vec{x}) = \begin{cases} \mu_- & \text{si } x < 0 \\ \mu_+ & \text{sinon} \end{cases} \quad (72)$$

Une onde plane dirigée suivant \vec{e}_3 émise au temps $t = -L/c$ par une source située à $x_3 = -L$ se dirige vers l'interface entre les deux milieux et il s'agit d'analyser ce qui arrive lorsque l'onde atteint le plan de séparation des deux milieux.

D'abord, avant le contact (en $t < 0$) il y a une onde progressive, appelée onde incidente dans ce contexte,

$$e_2(x_3, t) = -\sqrt{\mu_-/\epsilon_-} f(t - x_3/c_-) \quad \text{et} \quad h_1(x_3, t) = f(t - x_3/c_-) \quad (73)$$

où $c_- = 1/\sqrt{\mu_- \epsilon_-}$ est la vitesse de propagation dans le milieu « - » et où f est une fonction qui recèle la forme de l'onde plane.

Ensuite, après le contact (en $t > 0$), l'onde incidente se partage en une onde transmise au milieu « + » et une onde réfléchie dans le milieu « - ». L'onde transmise a la forme générale

$$e_2^t(x_3, t) = -\sqrt{\mu_+/\epsilon_+} g(t - x_3/c_+) \quad \text{et} \quad h_1^t(x_3, t) = g(t - x_3/c_+) \quad (74)$$

Et l'onde réfléchie, qui se propage dans la direction des x_3 décroissante,

$$e_2^r(x_3, t) = \sqrt{\mu_-/\epsilon_-} h(t + x_3/c_-) \quad \text{et} \quad h_r^t(x_3, t) = h(t + x_3/c_-) \quad (75)$$

Pour trouver les fonction g et h , il faut invoquer les relations de continuité des champ et induction électrique et magnétique sur l'interface séparant les deux milieux. Ici les composantes tangentielle des champs électriques et magnétiques se conservent (de manière que $|\nabla \times \vec{e}| < \infty$ et $|\nabla \times \vec{h}| < \infty$) à la traversée du plan. soit donc, en $x_3 = 0$,

$$e_2(0, t) + e_2^r(0, t) = e_2^t(0, t) \quad \text{et} \quad h_2(0, t) + h_2^r(0, t) = h_1^t(0, t) \quad (76)$$

d'où

$$\sqrt{\frac{\mu_-}{\epsilon_-}}(-f(t) + h(t)) = -\sqrt{\frac{\mu_+}{\epsilon_+}}g(t) \quad \text{et} \quad f(t) + h(t) = g(t) \quad (77)$$

soit encore

$$g(t) = \frac{2\sqrt{\frac{\mu_-}{\epsilon_-}}}{\sqrt{\frac{\mu_-}{\epsilon_-}} + \sqrt{\frac{\mu_+}{\epsilon_+}}}f(t) \quad \text{et} \quad h(t) = \frac{\sqrt{\frac{\mu_-}{\epsilon_-}} - \sqrt{\frac{\mu_+}{\epsilon_+}}}{\sqrt{\frac{\mu_-}{\epsilon_-}} + \sqrt{\frac{\mu_+}{\epsilon_+}}}f(t) \quad (78)$$

d'où vient que le coefficient de transmission d'une onde incidente passant du milieu « - » vers le milieu « + » est

$$C_{\text{transmission}} = \frac{e_2^t(0, t)}{e_2(0, t)} = \frac{2\sqrt{\frac{\mu_+}{\epsilon_+}}}{\sqrt{\frac{\mu_-}{\epsilon_-}} + \sqrt{\frac{\mu_+}{\epsilon_+}}} \quad (79)$$

et le coefficient de réflexion d'une onde incidente dans le milieu « - » à l'interface du milieu « + » est

$$C_{\text{réflexion}} = \frac{e_2^r(0, t)}{e_2(0, t)} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_+}{\epsilon_+}} - \sqrt{\frac{\mu_-}{\epsilon_-}}}{\sqrt{\frac{\mu_-}{\epsilon_-}} + \sqrt{\frac{\mu_+}{\epsilon_+}}} \quad (80)$$

exercice : le cas de milieux non conducteurs de l'électricité et cependant magnétiques est bien rare, aussi a-t-on souvent $\mu_- = \mu_+ = \mu_0$, ce qu'on choisit ici. De plus la quantité $n = \frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$ porte le nom d'indice de réfraction. Exprimer les coefficients de transmission et de réflexion en fonction des indices de réfractations.

L'onde plane dans l'espace

Pour obtenir un peu d'aisance dans les formulations, il est utile de donner une forme générale à l'onde plane. Le choix fait ici est de définir celle-ci à partir de la donnée d'un vecteur unitaire \vec{u} de l'espace et d'une fonction $\vec{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ satisfaisant à

$$\forall t : \vec{u} \cdot \vec{f}(t) = 0 \quad (81)$$

comme

$$\vec{e}(\vec{x}, t) = z \vec{f}\left(t - \frac{\vec{x} \cdot \vec{u}}{v}\right) \quad ; \quad \vec{h}(\vec{x}, t) = \vec{u} \times \vec{f}\left(t - \frac{\vec{x} \cdot \vec{u}}{v}\right) \quad (82)$$

où z et v sont reliées aux propriétés diélectrique et magnétique du milieu où se propage l'onde plane comme

$$z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad ; \quad v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \quad (83)$$

exercices : Montrer que les champs électrique et magnétique ainsi définis satisfont aux équations de Maxwell

L'onde plane monochromatique

Si la fonction \vec{f} est sinusoïdale de pulsation ω , elle peut s'écrire

$$\vec{f}(t) = \Re\{\underline{\vec{F}} \exp^{i \omega t}\} \quad (84)$$

où $\underline{\vec{F}}$ est un vecteur à composantes complexes. et alors

$$\vec{e}(\vec{x}, t) = \Re \left\{ z \underline{\vec{F}} \exp \left(i \omega t - \frac{i \omega \vec{x} \cdot \vec{u}}{v} \right) \right\} \quad ; \quad \vec{h}(\vec{x}, t) = \Re \left\{ \vec{u} \times \underline{\vec{F}} \exp \left(i \omega t - \frac{i \omega \vec{x} \cdot \vec{u}}{v} \right) \right\} \quad (85)$$

soit, sous une forme plus compacte

$$\vec{e}(\vec{x}, t) = \Re \left\{ \underline{\vec{E}} \exp^{i(\omega t - \vec{x} \cdot \vec{k})} \right\} \quad ; \quad \vec{h}(\vec{x}, t) = \Re \left\{ \frac{\vec{k} \times \underline{\vec{E}}}{\mu \omega} \exp^{i(\omega t - \vec{x} \cdot \vec{k})} \right\} \quad (86)$$

en utilisant comme paramétrisation

$$\begin{aligned} \underline{\vec{E}} = z \underline{\vec{F}} & \quad \text{l'amplitude complexe du champ électrique (pas de } \sqrt{2} \text{ dans les ondes)} \\ \vec{k} & \quad \text{le vecteur d'onde (homogène à l'inverse d'une longueur)} \\ \vec{k} \cdot \underline{\vec{E}} = 0 & \quad \text{contrainte sur } \underline{\vec{E}} \text{ et } \vec{k} \end{aligned}$$

L'onde est alors qualifiée de monochromatique.

L'onde plane monochromatique polarisée

Si $\exists \varphi$ tel que $\Re\{\underline{\vec{E}} \exp^{i \varphi}\} = 0$ alors l'onde plane monochromatique est dite polarisée linéairement. Dans le cas contraire elle est dite polarisée elliptiquement et elle peut être décomposée de façon non unique en la somme de deux ondes polarisées linéairement

$$\vec{e}(\vec{x}, t) = \Re \left\{ \underline{\vec{E}} \exp^{i(\omega t - \vec{x} \cdot \vec{k})} \right\} = \Re \left\{ \underline{\vec{E}}_1 \exp^{i(\omega t - \vec{x} \cdot \vec{k})} \right\} + \Re \left\{ \underline{\vec{E}}_2 \exp^{i(\omega t - \vec{x} \cdot \vec{k})} \right\}$$

exercices : prouver ces résultats en passant en composantes.

Réflexion et Réfraction

L'espace est séparé en deux domaines par un plan, pour \vec{n} un vecteur normé

$$\begin{aligned} \vec{x} \cdot \vec{n} = 0 & \quad \text{le plan } \partial D \\ \vec{x} \cdot \vec{n} > 0 & \quad \text{le demi-espace supérieur } D_+ \\ \vec{x} \cdot \vec{n} < 0 & \quad \text{le demi-espace inférieur } D_- \end{aligned}$$

Les domaines D_+ et D_- définissent deux milieux

$$\epsilon = \begin{cases} \epsilon_0 & \text{dans } D_+ \\ \epsilon_1 & \text{dans } D_- \end{cases} ; \quad \mu = \begin{cases} \mu_0 & \text{dans } D_+ \\ \mu_1 & \text{dans } D_- \end{cases} \longrightarrow n = \begin{cases} n_0 = c\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} & \text{dans } D_+ \\ n_1 = c\sqrt{\mu_1 \epsilon_1} & \text{dans } D_- \end{cases}$$

Il existe une onde monochromatique dans l'espace qui, si les deux milieux d'en formaient qu'un ($\epsilon_1 = \epsilon_0$ et $\mu_1 = \mu_0$), prendrait la forme

$$\vec{e}_i(\vec{x}, t) = \Re \left\{ \vec{E}_i \exp i(\omega t - \vec{x} \cdot \vec{k}_i) \right\} ; \quad \vec{h}_i(\vec{x}, t) = \Re \left\{ \frac{\vec{k}_i \times \vec{E}_i}{\mu_0 \omega} \exp i(\omega t - \vec{x} \cdot \vec{k}_i) \right\} \quad (87)$$

La question est de savoir quel est le système d'onde dans le cas où les deux milieux sont différents ($\epsilon_1 \neq \epsilon_0$ et $\mu_1 \neq \mu_0$). Et la réponse à cette question est qu'il y a

l'onde (18)	dite incidente	dans l'espace	D_+
l'onde (19)	réfléchie		D_+
l'onde (20)	réfractée		D_-

$$\vec{e}_r(\vec{x}, t) = \Re \left\{ \vec{E}_r \exp i(\omega t - \vec{x} \cdot \vec{k}_r) \right\} ; \quad \vec{h}_r(\vec{x}, t) = \Re \left\{ \frac{\vec{k}_r \times \vec{E}_r}{\mu_0 \omega} \exp i(\omega t - \vec{x} \cdot \vec{k}_r) \right\} \quad (88)$$

$$\vec{e}_t(\vec{x}, t) = \Re \left\{ \vec{E}_t \exp i(\omega t - \vec{x} \cdot \vec{k}_t) \right\} ; \quad \vec{h}_t(\vec{x}, t) = \Re \left\{ \frac{\vec{k}_t \times \vec{E}_t}{\mu_1 \omega} \exp i(\omega t - \vec{x} \cdot \vec{k}_t) \right\} \quad (89)$$

et donc le système d'onde

$$(\vec{e}, \vec{h}) = \begin{cases} (\vec{e}_i + \vec{e}_r, \vec{h}_i + \vec{h}_r) & \text{dans } D_+ \\ (\vec{e}_t, \vec{h}_t) & \text{dans } D_- \end{cases} \quad (90)$$

où il faut assurer les conditions de continuité de

$\vec{e} \times \vec{n}$	le champ électrique tangentiel
$\epsilon \vec{e} \cdot \vec{n}$	l'induction électrique normale
$\vec{h} \times \vec{n}$	le champ magnétique tangentiel
$\mu \vec{h} \cdot \vec{n}$	l'induction magnétique normale

à la traversée du plan ∂D .

exercice : compter le nombre d'inconnues et le nombre d'équations.

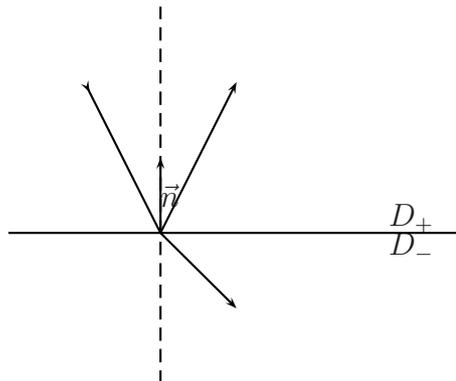
L'analyse de ce problème conduit d'abord à

– les vecteurs \vec{k}_r et \vec{k}_t sont dans le plan d'incidence (\vec{k}_i, \vec{n})

– \vec{k}_r le vecteur d'onde de l'onde réfléchie est $\vec{k}_r = \vec{k}_i - 2(\vec{n} \cdot \vec{k}_i) \vec{n}$ (angle d'incidence = angle de réflexion)

– $\vec{k}_t \times \vec{n} = \vec{k}_i \times \vec{n}$ (loi de Snell-Descartes)

ce qui permet de faire un dessin dans le plan



et d'établir les rapports (on a posé $\mu_1 = \mu_0$)

Si \vec{E}_i perpendiculaire au plan d'incidence, de module E_i il vient alors que \vec{E}_r et \vec{E}_t de modules E_r et E_t sont alignés et	
$\frac{E_t}{E_i} = \frac{2 n_0 \cos i}{n_0 \cos i + \sqrt{n_1^2 - n_0^2 \sin^2 i}}$	$;$ $\frac{E_r}{E_i} = \frac{n_0 \cos i - \sqrt{n_1^2 - n_0^2 \sin^2 i}}{n_0 \cos i + \sqrt{n_1^2 - n_0^2 \sin^2 i}}$
Si \vec{E}_i parallèle au plan d'incidence, de module E_i il vient alors que $\vec{k}_r \times \vec{E}_r$ et $\vec{k}_t \times \vec{E}_t$ de modules $ \vec{k}_r E_r$ et $ \vec{k}_t E_t$ sont alignés et	
$\frac{E_t}{E_i} = \frac{2 n_0 n_1 \cos i}{n_1^2 \cos i + n_0 \sqrt{n_1^2 - n_0^2 \sin^2 i}}$	$;$ $\frac{E_r}{E_i} = \frac{n_1^2 \cos i - n_0 \sqrt{n_1^2 - n_0^2 \sin^2 i}}{n_1^2 \cos i + n_0 \sqrt{n_1^2 - n_0^2 \sin^2 i}}$

Il y a deux phénomènes essentiels à connaître qui dépendent des formules précédentes.

Angle de Brewster

Dans le cas d'une onde plane monochromatique polarisée de manière que le champ électrique soit parallèle au plan d'incidence, on remarque que si l'angle d'incidence est i_B tel que

$$n_1^2 \cos i_B - n_0 \sqrt{n_1^2 - n_0^2 \sin^2 i_B} = 0 \implies \tan i_B = \frac{n_1}{n_0}$$

il n'y pas d'onde réfléchie.

On peut utiliser ce fait pour fabriquer une onde polarisée linéairement.

Réflexion interne totale

Si on reprend la loi de Snell-Descartes

$$\sin t = \frac{n_0}{n_1} \sin i$$

on voit que si $n_0 > n_1$ alors l'angle t cesse d'être réel pour

$$i > \arcsin n_1/n_0$$

Grossièrement, on peut dire n'y pas d'onde réfractée et donc que l'onde incidente est totalement réfléchie.

Principe de Fermat

L'examen de la loi de Snell-Descartes montre qu'une onde plane n'a pas une direction constante lorsqu'elle se propage dans un milieu d'indice de réfraction variable c'est à dire tel que

$$\begin{aligned} n &: E_3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\vec{x} \longrightarrow n(\vec{x}) \end{aligned} \quad (91)$$

. Le principe de Fermat permet de calculer cette direction de façon automatique.

Si le chemin par lequel passe l'onde est paramétrisé par $\vec{X}_\infty(s)$; si ce chemin passe par deux points \vec{x}_0 et \vec{x}_1 et que

$$V = \{\vec{X}(s) \text{ tq } \vec{X}(0) = \vec{X}_0 \text{ et } \vec{X}(1) = \vec{X}_1\} \quad (92)$$

alors

$$\vec{X}_\infty = \arg \min_{\vec{X}} \int_0^1 n(\vec{X}(s)) \left| \frac{d\vec{X}}{ds}(s) \right| ds \quad (93)$$

c'est à dire que le chemin qu'empruntera l'onde pour aller de \vec{X}_0 à \vec{X}_1 est celui qui minimise la fonctionnelle $\int_0^1 n(\vec{X}(s)) \left| \frac{d\vec{X}}{ds}(s) \right| ds$ qui, compte tenu que l'indice de réfraction est le rapport de la vitesse de la lumière dans le milieu à la vitesse de la lumière dans le vide, n'est rien d'autre que le temps que met l'onde pour aller d'un des points \vec{X}_0 ou \vec{X}_1 à l'autre multiplié par la vitesse de la lumière dans le vide.

exercice : Retrouver la loi de Snell-Descartes simple à partir du principe de Fermat : en dimension 2 puis 3.

La condition nécessaire d'extréma de (24) est

$$\frac{d}{ds} \left(n(\vec{X}(s)) \frac{\dot{\vec{X}}(s)}{|\dot{\vec{X}}(s)|} \right) = \vec{\nabla} n(\vec{X}(s)) |\dot{\vec{X}}(s)|; \quad \frac{d\vec{X}}{ds} = \dot{\vec{X}}(s) \quad (94)$$

qui complétée par les conditions aux limites (23) constitue un problème d'équations différentielles ordinaire dont la résolution éventuellement numérique ne pose pas de problèmes particuliers (mais il est probablement préférable de directement minimiser la fonctionnelle après avoir discrétisé la trajectoire sur une base d'éléments finis).

exercice : Montrer comment utiliser le principe de Fermat pour le problème de l'orientation d'une antenne afin d'envoyer une onde d'un point du globe à un autre en supposant que l'indice de réfraction est une fonction de l'altitude (décroissante).

Réflexion par une surface métallique

La rencontre d'une onde plane avec un domaine conducteur parfait (conductivité électrique infinie) de l'électricité peut être décrite en considérant que le champ tangentiel électrique total à l'intérieur du domaine doit être nul : sinon il y aurait un courant électrique infini le long de ce conducteur.

exercice : Construire l'onde réfléchie en incidence oblique et en traitant les deux cas qui se présentent.