

# Électromagnétisme



## Aimant Sphérique

G. Vinsard

Gerard.Vinsard@univ-lorraine.fr

21 septembre 2018

# Objectifs de la leçon

► Introduire l'aimant sphérique et son interaction avec un champ magnétique extérieur

► En vue d'introduire naturellement les équations de Maxwell des basses fréquences

*Parce que la situation de l'aimant sphérique en mouvement à proximité d'un conducteur électrique servira d'exemple emblématique aux notions de la leçon.*

► Et d'asseoir les connaissances en magnétostatique acquises en 1<sup>ière</sup> partie du module de « compléments en électromagnétisme. »

## L'aimant sphérique

► L'aimant sphérique présente l'avantage que l'expression du champ magnétique qu'il produit a une expression analytique. Si l'aimant

- est une boule de rayon  $R$  centrée à l'origine ;
- d'axe d'aimantation  $\vec{d}$  : un vecteur de direction, de norme 1  $|\vec{d}| = 1$  (le pôle nord (resp. sud) est le point qui maximise (resp. minimise)  $\vec{d} \cdot \vec{x}$  sur la sphère ( $|\vec{x}| = R$ ))
- et de densité d'aimantation  $m$ , une quantité ne dépendant que de la matière qui compose l'aimant (en Ampère par mètre  $A/m$ ) qui vaut approximativement :  $10^6 A/m$  pour du néodyme-fer-bore et  $0.3 \cdot 10^6 A/m$  pour de la ferrite ;

alors le champ magnétique  $\vec{h}$  est

$$\text{et } \vec{h} = m \begin{cases} -\frac{1}{3} \vec{d} & \text{pour } |\vec{x}| < R \\ \frac{R^3}{3 |\vec{x}|^3} \left( 3 \frac{(\vec{d} \cdot \vec{x}) \vec{x}}{|\vec{x}|^2} - \vec{d} \right) & |\vec{x}| > R \end{cases}$$

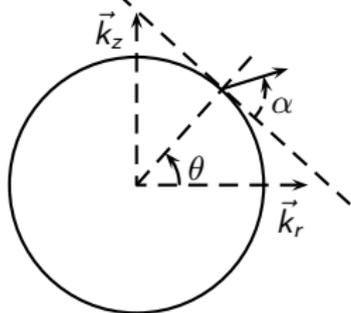
## Commentaire sur la planche précédente

- ▶ *Il y a une boule ; dans cette boule une aimantation qui est donnée par son intensité  $n$  et sa direction  $\vec{d}$  ; et à cette aimantation est associé  $\vec{h}$  une fonction à valeur vectorielle dépendant de la position  $\vec{x}$  dans l'espace qu'on appelle un champ magnétique.*
- ▶ **Est-on bien sûr de comprendre de quoi il s'agit ? Est-ce que ça a la moindre utilité d'ailleurs ?**
- ▶ Dans un contexte de sciences de l'ingénieur, on ne peut pas « comprendre » tant qu'on n'a pas mis en œuvre les notions pour en faire tirer un résultat pratique et observable. Et le critère qui permet un jugement sur l'utilité est précisément qu'un résultat pratique et observable dérivant des notions soit donné.
- ▶ Seulement il est nécessaire de s'appropriier les notions avant de pouvoir en extraire des résultats pratiques et observable. D'où un travail préalable.

## Exercice de compréhension de la formule

- ▶ Attention ! Le magnétisme terrestre ne s'explique plus comme cela depuis près de 150 ans.
- ▶ Mais quantitativement le champ magnétique terrestre est approximativement celui que produirait un aimant sphérique en néodyme-fer-bore de 120 km de rayon, placé au centre de la terre (rayon  $\approx 6400$  km) et dont l'axe d'aimantation est aligné sur l'axe de rotation de la terre (on confond les nord géographique et magnétique).
- ▶ Montrer que ce modèle explique que le champ magnétique à Nancy (latitude  $\approx 48^\circ$  nord) est d'intensité  $3.6 \text{ A/m}$  ( $4.5 \mu\text{T}$  micro-tesla) avec un angle  $\approx 66^\circ$  par rapport à l'horizontal et est dirigé vers le pôle sud.

## Correction



$\vec{k}_z$  et  $\vec{k}_r$  sont les vecteurs de base suivant l'axe et radial ;  
Le cercle a pour rayon celui de la terre :  $\mathcal{R}$  ;  
 $\theta$  est la latitude ;  
 $\alpha$  l'angle que fait le vecteur  $\vec{h}$  avec l'horizontale.

► La direction d'aimantation est  $\vec{d} = \vec{k}_z$  ; La position de Nancy est  $\mathcal{R} (\cos \theta \vec{k}_r + \sin \theta \vec{k}_z)$  ; le champ magnétique y est donc

$$\vec{h} = \frac{R^3 m}{\mathcal{R}^3} \left( \sin \theta \cos \theta \vec{k}_r + \left( \sin^2 \theta - \frac{1}{3} \right) \vec{k}_z \right)$$

De plus, la direction de l'horizontale est  $\vec{\tau} = \sin \theta \vec{k}_r - \cos \theta \vec{k}_z$  d'où

$$|\vec{h}| = \frac{R^3 m}{\mathcal{R}^3} \sqrt{\sin^2 \theta \cos^2 \theta + \left( \sin^2 \theta - \frac{1}{3} \right)^2} = 3.5815 \text{ A/m}$$
$$\cos \alpha = \frac{\vec{h} \cdot \vec{\tau}}{|\vec{h}|} = \frac{\sin^2 \theta \cos \theta - \cos \theta \left( \sin^2 \theta - \frac{1}{3} \right)}{\sqrt{\sin^2 \theta \cos^2 \theta + \left( \sin^2 \theta - \frac{1}{3} \right)^2}} = 0.41052$$

## Interaction entre un champ magnétique extérieur et un aimant sphérique

- ▶  $\vec{h}_s$  est un champ magnétique extérieur ; i.e. il est produit par n'importe quelle source en dehors de l'aimant considéré ; de plus ce champ est à laplacien nul dans toute la région de l'espace occupée par l'aimant (c'est toujours le cas).
- ▶ Dans ces circonstances, la partie de la coénergie magnétique qui traduit l'interaction entre ce champ et l'aimant est

$$\overline{W} = \mu_0 \mathcal{M} \vec{d} \cdot \vec{h}_s(0)$$

où

$$\mathcal{M} = m \frac{4}{3} \pi R^3 \text{ et } \mu_0 = 4 \pi 10^{-7} \text{ H/m}$$

$\mathcal{M}$  est le moment magnétique de l'aimant ;  $\mu_0$  la perméabilité magnétique du vide.

## Commentaires sur la planche précédente 1/2

- Qu'est-ce que le laplacien d'un champ de vecteur  $\vec{h}$ ? c'est un autre champ de vecteur  $\vec{\Delta h}$  qui a pour expression : si  $\vec{h} = h_x \vec{k}_x + h_y \vec{k}_y + h_z \vec{k}_z$

$$\vec{\Delta h} = \Delta h_x \vec{k}_x + \Delta h_y \vec{k}_y + \Delta h_z \vec{k}_z$$

où  $\Delta\phi$  est le laplacien d'un champ scalaire  $\phi$  (ici  $\phi = h_x, h_y, h_z$  les composantes de  $\vec{h}$  dans la base orthonormée  $(\vec{k}_x, \vec{k}_y, \vec{k}_z)$ ) et on appelle champ scalaire une fonction de la position.

- Qu'est-ce que le laplacien d'un champ scalaire  $\phi$ ? c'est un autre champ scalaire  $\Delta\phi$  qui a pour expression : si  $\vec{x} = x \vec{k}_x + y \vec{k}_y + z \vec{k}_z$

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial^2x} + \frac{\partial^2\phi}{\partial^2y} + \frac{\partial^2\phi}{\partial^2z}$$

## Commentaires sur la planche précédente 2/2

- ▶ **En quoi le fait d'être un champ à laplacien nul est-il nécessaire ?** là il faut déjà entrer dans les propriétés des champs à laplacien nul. C'est un des sujets du cours de mathématiques.
- ▶ Il faut également savoir laquelle de ces propriétés est utilisée pour affirmer que **la partie de la coénergie magnétique qui traduit l'interaction entre ce champ et l'aimant est ...**
- ▶ C'est à dire qu'il faut savoir *a priori* ce qu'est la coénergie magnétique. Le cours précédent a introduit la coénergie magnétique comme **cette énergie qui est une forme quadratique des courants électriques. Mais ici il n'y a pas de courants électriques !**
- ▶ Et de toute façon le concept d'énergie n'a d'intérêt que si cette énergie varie. Si la cause de variation est un mouvement, la variation de l'énergie est le travail des forces qui correspondent à ce mouvement.

## Force qu'un champ magnétique extérieur génère sur un aimant sphérique

- ▶ Si le centre de l'aimant est à la position  $\vec{X}$  dans l'espace, la coénergie magnétique d'interaction est

$$\overline{W} = \mu_0 \mathcal{M} \vec{d} \cdot \vec{h}_s(\vec{X})$$

- ▶ La force générée sur l'aimant est alors

$$\vec{f} = \vec{\nabla}_{\vec{X}} \overline{W} = \partial_x \overline{W} \vec{k}_x + \partial_y \overline{W} \vec{k}_y + \partial_z \overline{W} \vec{k}_z$$

où  $\vec{k}_x, \vec{k}_y, \vec{k}_z$  forment une base orthonormée de l'espace et  $\vec{X} = x \vec{k}_x + y \vec{k}_y + z \vec{k}_z$ .

- ▶ Le couple généré sur l'aimant est

$$\vec{\gamma} = \mu_0 \mathcal{M} \vec{d} \times \vec{h}_s(\vec{X})$$

où  $\times$  signifie « produit vectoriel ».

## Commentaire sur la planche précédente

► Le gradient d'une fonction  $\overline{W}$  dépendant d'un vecteur  $\vec{X}$  est introduit. Si  $\overline{W}$  est différentiable par rapport à  $\vec{X} = x \vec{k}_x + y \vec{k}_y + z \vec{k}_z$ , il est alors possible de construire avec elle le vecteur

$$\vec{\nabla} \overline{W}(\vec{X}) = \partial_x \overline{W}(x, y, z) \vec{k}_x + \partial_y \overline{W}(x, y, z) \vec{k}_y + \partial_z \overline{W}(x, y, z) \vec{k}_z$$

qui est appelé le gradient de  $\overline{W}$  en  $\vec{X}$ . Ce vecteur permet d'écrire le développement de Taylor de  $\overline{W}$  en  $\vec{x}$  à l'ordre 1 comme

$$\overline{W}(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) = \underbrace{\overline{W}(x, y, z)}_{=0} + \vec{\nabla} \overline{W}(\vec{X}) \cdot \delta \vec{X} + o(|\delta \vec{X}|)$$

avec  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{o(\epsilon)}{\epsilon} = 0$  et  $\delta \vec{X} = \delta x \vec{k}_x + \delta y \vec{k}_y + \delta z \vec{k}_z$

► On a écrit  $\overline{W}(\vec{X}) = \overline{W}(x, y, z)$ ; c'est un abus de notation mais il est légitime dès lors qu'on ne change pas de base pour écrire le vecteur position en coordonnées.

## Commentaire sur le commentaire précédent

- Les dérivées partielles d'une fonction

$$\begin{aligned} \overline{W} : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} && \text{se notent } \partial_x \overline{W}, \partial_y \overline{W}, \partial_z \overline{W}. \\ (x, y, z) &\longrightarrow \overline{W}(x, y, z) \end{aligned}$$

Ce sont des fonctions  $\partial_x \overline{W} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$   
 $(x, y, z) \longrightarrow \partial_x \overline{W}(x, y, z)$

définies par

$$\partial_x \overline{W}(x, y, z) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\overline{W}(x + \epsilon, y, z) - \overline{W}(x, y, z)}{\epsilon}$$

(idem pour  $\partial_y \overline{W}$ ,  $\partial_z \overline{W}$ )

- Lorsque les limites existent la fonction  $\overline{W}$  est dite différentiable, sa différentielle est l'application linéaire (en revenant aux notations en vecteurs)

$$\begin{aligned} D(\overline{W})(\vec{X}) : E_3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \delta \vec{X} &\longrightarrow \vec{\nabla} \overline{W}(\vec{X}) \cdot \delta \vec{X} \end{aligned}$$

## Exercice

► Calculer la force qu'exercent l'un sur l'autre deux aimants identiques (même rayon, même densité d'aimantation) de centres  $\vec{X}_1$ ,  $\vec{X}_2$  et directions d'aimantation  $\vec{d}_1$  et  $\vec{d}_2$  dans les configurations :

1.  $\vec{d}_1 = \vec{d}_2 = \vec{d}$ ,  $\vec{X}_1 = \vec{0}$ ,  $\vec{X}_2 = x \vec{d}$ ;
2.  $\vec{d}_1 = \vec{d}$ ,  $\vec{d}_2 = -\vec{d}$ ,  $\vec{X}_1 = \vec{0}$ ,  $\vec{X}_2 = x \vec{d}$ ;
3.  $\vec{d}_1 = \vec{d}_2 = \vec{d}$ ,  $\vec{X}_1 = \vec{0}$ ,  $\vec{X}_2 = x \vec{d}^\perp$  avec  $\vec{d}^\perp \cdot \vec{d} = 0$
4.  $\vec{d}_1 = \vec{d}$ ,  $\vec{d}_2 = -\vec{d}$ ,  $\vec{X}_1 = \vec{0}$ ,  $\vec{X}_2 = x \vec{d}^\perp$  avec  $\vec{d}^\perp \cdot \vec{d} = 0$
5.  $\vec{d}_1 = \vec{d}_2 = \vec{d}$ ,  $\vec{X}_1 = \vec{0}$ ,  $\vec{X}_2 = x (\cos \theta \vec{d} + \sin \theta \vec{d}^\perp)$

De plus dans ce cas :

- 5.1 que remarque-t-on pour  $\theta = 54^\circ 44' 8''$  ?
- 5.2 donner les zones d'attraction et de répulsion pour des aimants de moments magnétiques alignés.

## Correction 1/2

$$1. \overline{W} = \frac{\mu_0 \mathcal{M}^2}{4\pi} \frac{2}{x^3} \Rightarrow \vec{f} = -\frac{\mu_0 \mathcal{M}^2}{4\pi} \frac{6}{x^4} \vec{d}$$

$$2. \overline{W} = -\frac{\mu_0 \mathcal{M}^2}{4\pi} \frac{2}{x^3} \Rightarrow \vec{f} = +\frac{\mu_0 \mathcal{M}^2}{4\pi} \frac{6}{x^4} \vec{d}$$

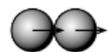
$$3. \overline{W} = -\frac{\mu_0 \mathcal{M}^2}{4\pi} \frac{1}{x^3} \Rightarrow \vec{f} = +\frac{\mu_0 \mathcal{M}^2}{4\pi} \frac{3}{x^4} \vec{d}^\perp$$

$$4. \overline{W} = \frac{\mu_0 \mathcal{M}^2}{4\pi} \frac{1}{x^3} \Rightarrow \vec{f} = -\frac{\mu_0 \mathcal{M}^2}{4\pi} \frac{3}{x^4} \vec{d}^\perp$$

$$5. \overline{W} = \frac{\mu_0 \mathcal{M}^2}{4\pi} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{x^3} \Rightarrow$$

$$\vec{f} = -\frac{\mu_0 \mathcal{M}^2}{4\pi} \frac{3 (3 \cos^2 \theta - 1)}{x^4} (\cos \theta \vec{d} + \sin \theta \vec{d}^\perp)$$

## Correction 2/2



Attraction  
max



Attraction  
 $1/2$  max



Répulsion  
max



Répulsion  
 $1/2$



Pas de  
forces (mais  
un couple)

