Calcul symbolique

Mouvement d'une boule roulant sans glisser sur un plan

G. Vinsard

Gerard.Vinsard@univ-lorraine.fr

3 janvier 2016

Espace, position et plan

- L'espace est repéré par la base $(\vec{k}_x, \vec{k}_x, \vec{k}_z)$ de manière qu'une position soit définie par le vecteur

$$\vec{x} = x\ \vec{k}_x + y\ \vec{k}_y + z\ \vec{k}_z \ \text{ ou } \ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

où x, y, z sont les coordonnées (on appelle également vecteur le triplet X qui correspond à l'idéographie ci-dessus).

- Le plan est défini paramétriquement comme

$$P = \{\vec{x} = x\ \vec{k}_x + y\ \vec{k}_y\} \text{ ou } \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

où les coordonnées x et y servent de paramètres.

La boule sur le plan

- La boule est posée sur le plan, si son rayon est R la position de son centre est située sur le plan

$$\{\vec{x}_c = x\ \vec{k}_x + y\ \vec{k}_y + R\ \vec{k}_z\} \text{ ou } \left\{ X_c = \begin{pmatrix} x \\ y \\ R \end{pmatrix} \right\}$$

de manière qu'elle ait le point de contact $\vec{x}$ ou X avec le plan P.

- Le centre est mobile et donc x et y sont des *variables dépendantes* du temps t.

- De la même façon la boule subit un mouvement de rotation et donc si $\vec{\Omega}$ est le vecteur instantané de rotation (variable dépendante de t) la vitesse due à cette rotation en un point $\vec{x}_b$ lié à cette boule est

$$\vec{\Omega} \times (\vec{x}_b - \vec{x}_c)$$

La boule sur le plan

- Si (notation de Newton pour les dérivations par rapport au temps)

$$\dot{\vec{x}}_c = \dot{x}\ \vec{k}_x + \dot{y}\ \vec{k}_y$$

est la vitesse du centre de la boule, alors la vitesse totale d'un point $\vec{x}_s$ de la surface de la boule est

$$\dot{\vec{x}}_c + \vec{\Omega} \times (\vec{x}_s - \vec{x}_c)$$

- Si ce point est le point de contact $\vec{x}_s = \vec{x}_c - R\ \vec{k}_z$ de la boule avec le plan, la condition de roulement sans glissement se traduit par

$$\dot{\vec{x}}_c + \vec{\Omega} \times (\vec{x}_s - \vec{x}_c) = \dot{\vec{x}}_c - R\ \vec{\Omega} \times \vec{k}_z = \vec{0}$$

- Si le champ de gravité est $-g\ \vec{k}_z$ et que la force que la plan exerce sur la boule (en $\vec{x}_c - R\ \vec{k}_z$) est $\vec{f}$ (une inconnue) alors le principe fondamental de la dynamique (PFD) permet d'écrire (le moment d'inertie d'une boule homogène est $2/5\ M\ R^2$)

$$M\ \ddot{\vec{x}}_c = \vec{f} - M\ g\ \vec{k}_z \text{ et } \frac{2}{5}\ M\ R^2\ \dot{\vec{\Omega}} = -R\ \vec{k}_z \times \vec{f}$$

La boule sur le plan

- La condition de roulement sans glissement permet d'écrire que

$$\ddot{\vec{x}}_c - R\,\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{k}_z = \vec{0}$$

Soit donc en y injectant les équations du PFD

$$\frac{\vec{f} - M\,g\,\vec{k}_z}{M} - R\,\frac{-R\,\vec{k}_z \times \vec{f}}{\frac{2}{5}\,M\,R^2} \times \vec{k}_z = \vec{0}$$

en simplifiant

$$\frac{7}{2}\,\vec{f} - (M\,g + \frac{5}{2}\,\vec{f} \cdot \vec{k}_z)\,\vec{k}_z = \vec{0}$$

d'où vient que

$$\vec{f} = M\,g\,\vec{k}_z$$

et que le PFD se réduit à

$$M\,\ddot{\vec{x}}_c = \vec{0} \text{ et } \frac{2}{5}\,M\,R^2\,\dot{\vec{\Omega}} = \vec{0}$$

La boule sur le plan

- Ces relations sont intégrables, si

$$\dot{\vec{x}}_c(t=0) = \dot{\vec{x}}_0 \ \text{ et } \vec{\Omega}(t=0) = \vec{\Omega}_0$$

alors pour tout temps

$$\dot{\vec{x}}_c = \dot{\vec{x}}_0 \ \text{ et } \vec{\Omega} = \vec{\Omega}_0$$

où nécessairement

$$\dot{\vec{x}}_0 - R\,\vec{\Omega}_0 \times \vec{k}_z = \vec{0}$$

Le mouvement de la boule se fait de manière que la vitesse de son centre est constante ; que les composantes dirigées suivant $\vec{k}_x$ et $\vec{k}_y$ de $\vec{\Omega}$ sont également contantes, telles que la relation de non-glissement soit vérifiée ; que la composante de $\vec{\Omega}$ dirigée suivant $\vec{k}_z$ est encore constante mais indépendante de la vitesse du centre.

Trajectoire d'un point de la surface de la boule

- Si un point lié à la surface de la boule est $\vec{\xi} = \xi\ \vec{k}_x + \upsilon\ \vec{k}_y + \zeta\ \vec{k}_z + \dot{\vec{x}}_0\ t$ (avec $\xi^2 + \upsilon^2 + \zeta^2 = R^2$) alors

$$\dot{\vec{\xi}} = \vec{\Omega}_0 \times \vec{\xi}$$

- Pour $\vec{\Omega}_0 = \Omega_x\ \vec{k}_x + \Omega_y\ \vec{k}_y + \Omega_z\ \vec{k}_z$ on obtient

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\xi\\ \upsilon\\ \zeta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -\Omega_z & \Omega_y\\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x\\ -\Omega_y & \Omega_x & 0\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}\xi\\ \upsilon\\ \zeta\end{pmatrix}$$

qui s'intégre (cf. Maxima par exemple).

- On notera que la condition de non-glissement s'écrit

$$\dot{\vec{x}}_0 = R\ \left(\Omega_y\ \vec{k}_x - \Omega_x\ \vec{k}_y\right)$$

Le problème

- L'analyse précédente montre que le problème du roulement sans glissement d'une boule sur un plan n'offre aucune difficulté ;

- Cependant si on le pose formellement en introduisant :
  - les coordonnées (x, y) du centre de la boule ;
  - les angles d'Euler ψ (précession), θ nutation et ϕ rotation propre du mouvement de solide qui permettent le passage de la base fixe (attachée au plan) $(\vec{k}_x, \vec{k}_y, \vec{k}_z)$ à la base mobile (attachée à la boule) $(\vec{K}_x, \vec{K}_y, \vec{K}_z)$ par

$$\vec{k}'_x = \cos\psi\ \vec{k}_x + \sin\psi\ \vec{k}_y \quad ; \quad \vec{k}'_y = -\sin\psi\ \vec{k}_x + \cos\psi\ \vec{k}_y \quad ; \quad \vec{k}'_z = \vec{k}_z$$

$$\vec{k}''_y = \cos\theta\ \vec{k}'_y + \sin\theta\ \vec{k}'_z \quad ; \quad \vec{k}''_z = -\sin\theta\ \vec{k}'_y + \cos\theta\ \vec{k}'_z \quad ; \quad \vec{k}''_x = \vec{k}'_x$$

$$\vec{K}_x = \cos\phi\ \vec{k}''_x + \sin\phi\ \vec{k}''_y \quad ; \quad \vec{K}_y = -\sin\phi\ \vec{k}''_x + \cos\phi\ \vec{k}''_y \quad ; \quad \vec{K}_z = \vec{k}''_z$$

alors le vecteur instantané de rotation est

$$\vec{\Omega} = \dot{\psi}\ \vec{k}_z + \dot{\theta}\ \vec{k}'_x + \dot{\phi}\ \vec{K}_z$$

Le problème

- La relation de roulement sans glissement est toujours

$$\dot{x}\,\vec{k}_x + \dot{y}\,\vec{k}_y - R\,\vec{\Omega} \times \vec{k}_z$$

qui fournit deux relations (suivant $\vec{k}_x$ et $\vec{k}_y$) de la forme

$$f(\psi, \theta, \phi, \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}) = 0 \text{ et } g(\psi, \theta, \phi, \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}) = 0$$

- L'énergie cinétique de la boule est

$$T(x, y, \psi, \theta, \phi, \dot{x}, \dot{y}, \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}) = \frac{1}{2}\,M\,\left(\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \frac{2}{5}\,R^2\,\vec{\Omega}^2\right)$$

- Et, en l'absence d'énergie potentielle (hormis celle de la gravité qui est compensée par la liaison $z = 0$) T est le lagrangien du problème à partir duquel les équations du mouvement sont les équations d'Euler-Lagrange (pour $\chi = x, y, \psi, \theta, \phi$)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\chi}}\right) = \frac{\partial T}{\partial \chi} + \lambda\,\frac{\partial f}{\partial \dot{\chi}} + \mu\,\frac{\partial g}{\partial \dot{\chi}}$$

où λ et μ sont les multiplicateurs de Lagrange (Ferrers) associés aux liaisons $f = 0$ et $g = 0$

Le problème

- On demande d'exprimer ces équations d'Euler-Lagrange et de vérifier que le mouvement trouvé par l'analyse à partir du PFD en est bien solution.

- Il ne s'agit évidemment pas de faire les calculs à la main mais au contraire d'utiliser Maxima.

L'objectif du travail est de manipuler des équations relativement compliquées mais dont la solution est simple et cela dans un objectif d'appropriation des principes du calcul symbolique.

Extensions (difficiles) du problème

- Vers la simulation d'un jeu de billard
  - Ajouter des limites en x et y qui figureront les bandes d'un jeu de billard ;
  - Ajouter la possibilité pour la boule de décoller du plan ;
  - Ajouter deux autres boules pour atteindre la configuration du billard français.

Dans ces trois cas il y a choc. On peut utiliser un coefficient de restitution de Newton et supposer que les lois de Coulomb s'appliquent instantanément lors du choc.

- Vers la modélisation du mouvement sur un plan d'un aimant sphérique soumis à l'action du champ magnétique terrestre. On retranche alors au lagrangien l'énergie magnétique

$$\mathcal{M}\ \vec{d} \cdot \vec{h}$$

où $\vec{b} \approx 5.0\ 10^{-5}\ \left(\cos 65^o\ \vec{k}_z + \sin 65^0\ \vec{k}_x\right)$ (en T) est l'induction terrestre à Nancy, $\vec{k}_x$ étant dirigé vers le sud ; $\mathcal{M} = \frac{4}{3}\ \pi\ R^3\ m$ est le moment magnétique de l'aimant ; avec $m \approx 10^6\ Am^2$ la densité d'aimantation d'un aimant en néodyme-fer-bore. $\vec{d}$ est la direction de l'axe sud-nord de l'aimant.