

# Calcul symbolique



## Modèle de type circuit électrique d'un inducteur



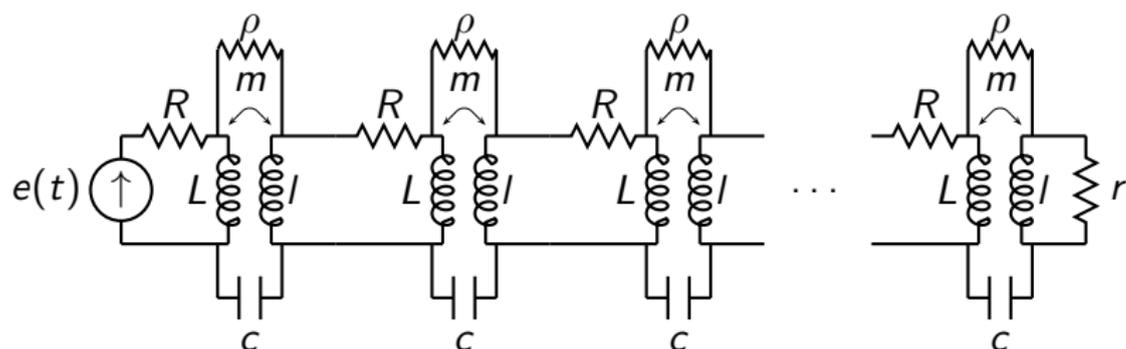
G. Vinsard

Gerard.Vinsard@univ-lorraine.fr

23 février 2016

## Le modèle de circuit

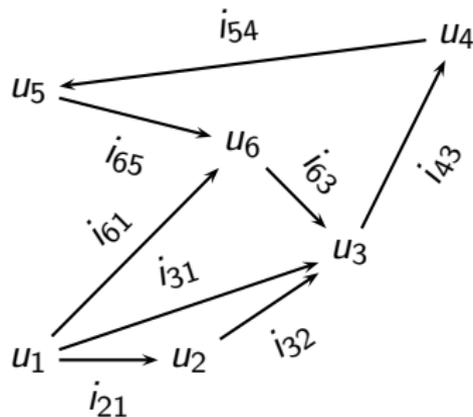
Un modèle d'enroulement de spires inductrices avec prise en compte d'effet capacitif est fourni par le circuit électrique



Il s'agit de calculer les courants partout dans ce circuit en considérant qu'il y a  $N$  cellules.

## Le circuit électrique est un graphe

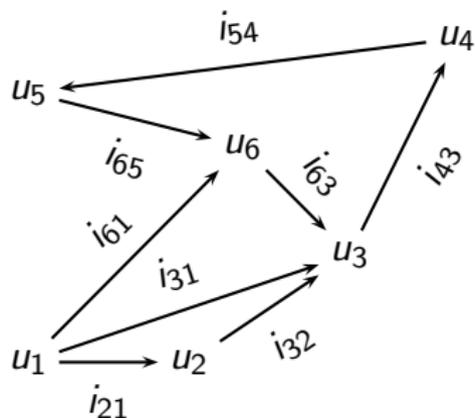
► un circuit électrique est un graphe<sup>1</sup> aux nœuds duquel sont attachés des valeurs de potentiel électrique et dont les arêtes sont parcourues par des courants électriques.



les nœuds sont numérotés de 1 à 6 ; les valeurs de potentiels  $u_n$  sont nommés par le symbole  $u$  indicé par les numéros de nœuds ; les valeurs de courant sont nommés par le symbole  $i$  double indicé par, dans l'ordre, le numéro de nœud vers lequel est dirigé le courant et le numéro de nœud d'où provient ce courant.

1. La notion sera précisée dans le cours *ad hoc*.

## Le circuit électrique est un graphe



Les « courants incidents à un nœud donné » sont les courants dirigés vers ce nœud mais aussi ceux dont il est la provenance, mais alors dans ce dernier cas ils sont compté négativement. Par exemple les courants incidents au nœud No 3 sont :  $i_{32}$ ,  $i_{31}$ ,  $i_{63}$  et  $-i_{43}$ . La « tension entre bornes » ou « différence de potentiels » est

$$V_{nm} = U_n - U_m$$

## Lois de Kirchoff

- ▶ Loi de Kirchoff :
  - ▶ La somme des courants incidents à un noeud du circuit électrique est nulle (loi aux nœuds) ;
  - ▶ la somme des tensions aux bornes des arêtes le long d'un parcours fermé sur le circuit (une maille) est nulle (loi aux mailles).
  
- ▶ Relation d'Euler : si  $A$  est le nombre de courants (le nombre d'arête du graphe),  $M$  est le nombre de mailles élémentaires (à partir desquelle il est possible de reconstituer toute les autres mailles) et  $N$  le nombre de potentiels (nombre de nœuds) alors

$$M = A - N + 1$$

- ▶ Le point important : il y a  $N - 1$  relations indépendantes dans la loi aux nœuds et donc  $A - (N - 1) = M$  courants indépendants.

## Expression paramétrique de la loi aux nœuds

- Construction des lois aux nœuds : chaque arête  $a$  du graphe relie les nœuds amonts  $N_a$  et aval  $n_a$ . Il suffit de créer un tableau  $LN$  de longueur  $N$  initialement à 0 et de le remplir par une boucle sur l'ensemble des arêtes par

$$LN[N_a] = LN[N_a] - i_a ; LN[n_a] = LN[n_a] + i_a$$

le tableau  $LN$  contiendra toutes les lois aux nœuds.

- Ces relations ne sont pas indépendantes ; mais Maxima comporte une fonction capable d'exprimer tous les courants en un jeu de courants indépendants : c'est '*linsolve*' avec l'option '*linsolve\_params :false*' (et '*linsolvewarn :false*' si on veut). On obtient ainsi une relation paramétrique de la forme

$$I = L J$$

où  $I$  est le vecteur des courants,  $L$  une matrice et  $J$  le vecteur des courants indépendants.

# Théorème de Tellegen

► Si  $I$  est le vecteur des courants,  $V$  celui des différences de potentiels de manière que  $I_a$  et  $V_a$  les composantes  $a$  des vecteur  $I$  et  $V$  soient les courants et différence de potentiel sur la même arête du graphe, alors

$${}^t V I = 0$$

et cela quelle que soit la liaison de type circuit entre courants et tension.

► On obtient alors que si  $U = L J$  nécessairement

$${}^t L V = 0$$

ce qui permet de contruire les relations de la loi aux mailles dans le cas où il n'y a que des composants passifs et des générateurs de tension dans le circuit.

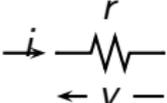
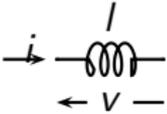
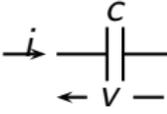
## Construction des relations de la loi aux mailles

► Les courants indépendants étant rangés dans le vecteur  $J$  (de dimension  $A - N + 1$ ), On crée un tableau  $LM$  de longueur  $A - N + 1$  initialement à

$$LM[a'] = V_a$$

où  $V_a$  est la différence de potentiels de l'arête  $a$  telle que  $J_{a'} = I_a$  (calculée à partir des relations de circuit). Puis on effectue une boucle sur l'ensemble des relations de  $I = L J$  qui contiennent explicitement  $I_a$  pour ajouter les  $V_{a''}$  correspondant aux  $LM[a']$ .

## Annexe 1 : Idéographie des composants électriques passifs

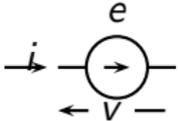
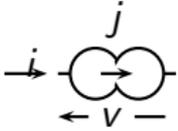
| composant      | coefficient | Unité          | symbole  | relation  |
|----------------|-------------|----------------|--|---|
| résistance     | résistance  | $\Omega$ (Ohm) |  | $v = r i$   |
| autoinductance | inductance  | $H$ (Henry)    |  | $v = \frac{d\varphi}{dt}$<br>avec $\varphi = l i$ |
| condensateur   | capacité    | $F$ (Farad)    |  | $i = \frac{dq}{dt}$ avec<br>$q = C v$             |

Deux quantités intermédiaires ont été introduites :

- ▶ le « flux magnétique »  $\varphi$  dont l'unité est le Weber ( $Wb$ )
- ▶ la « charge électrique »  $q$  dont l'unité est le Coulomb ( $Cb$ ).

L'unité de la « différence de potentiel » abrégée en « tension »  $v$  est le Volt ( $V$ ) et celle du courant électrique l'Ampère ( $A$ )

## Annexe 2 : Idéographie des composants électriques actifs

| composant             | coefficient    | symbole   | relation                       |
|-----------------------|----------------|---|--------------------------------|
| générateur de tension | tension source |  | $v = -e$ où $e$ est une donnée |
| générateur de courant | courant source |  | $i = j$ où $j$ est une donnée  |

La tension source peut aussi être appelée une force électromotrice : on remarquera que le choix fait pour la relation entre le sens du courant et de la ddp (convention générateur) est opposée à celui des composants passifs (convention récepteur).

Ces composants actifs sont une idéalisation de circuits électriques<sup>2</sup> qui assurent leur fonction globale ; l'étude de ces circuits dépassant les objectifs de la leçon.

---

2. Sauf pour les batteries qui sont des convertisseurs électrochimiques.