CAO - GE

TD No1

G. Vinsard

Gerard.Vinsard@univ-lorraine.fr

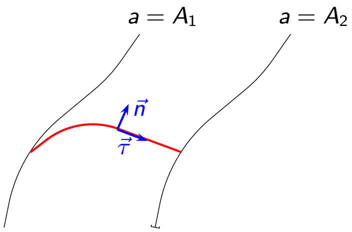
2 mai 2017

Flux magnétique et potentiel vecteur magnétique en 2D droit

- La symétrie 2 droite (appelée encore cylindrique) se traduit par : des domaines de l'espace invariants suivant une direction (disons $\vec{k}_z$) ; des champs de scalaires et de vecteurs invariants le long de cette direction $\partial_z = 0$.

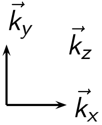
- Dans ces circonstances un type de solution des équations de la magnétostatique (cf. cours) est décrit par

$$\vec{a} = a\,\vec{k}_z \;;\; \vec{b} = \vec{\nabla} \times \vec{a} = \vec{\nabla} a \times \vec{k}_z = \partial_y a\,\vec{k}_x - \partial_x a\,\vec{k}_y$$



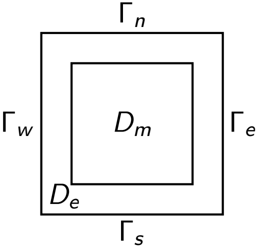
- Le flux magnétique par unité de longueur (dans la direction $\vec{k}_z$) est $\Phi = \int_\Gamma \vec{b}\cdot\vec{n}\,dl = \int_\Gamma \vec{\nabla} a \cdot \underbrace{\vec{k}_z \times \vec{n}}_{=-\vec{\tau}}\,dl$ et donc de part la définition intrinsèque du gradient $\Phi = A_2 - A_1$

Le problème du TD



$$\vec{k}_z = \vec{k}_x \times \vec{k}_y$$

$$\nu = \begin{cases} 1/\mu_0 & \text{dans} \quad D_e \\ 1/(\mu_0\ \mu_r) & - \quad\quad D_m \end{cases}$$

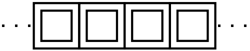


a est sol. de $\vec{\nabla} \cdot \left(\nu \vec{\nabla} a \right) = 0$ dans $D = D_m + D_e$.
Les C.L. proposées sont de flux imposé

$$a = \begin{cases} A_0 & \text{sur} \quad \Gamma_e \\ 0 & - \quad\quad \Gamma_w \end{cases}$$

et traduisent une périodicité sur Γ_e, Γ_w, soit

$$\partial_x a = 0 \text{ sur } \Gamma_e \text{ et } \Gamma_e$$



(c'est la synthèse entre $a|_{\Gamma_e} = a|_{\Gamma_w}$ et la symétrie par rapport à l'axe de direction $\vec{k}_y$ passant par le centre des carrés)

Forme faible et énergie magnétique

- $V = \left\{ a \in H^1(D) \text{ et } a = \left\{ \begin{array}{lll} A_0 & \text{sur} & \Gamma_e \\ 0 & - & \Gamma_w \end{array} \right\} \right.$
$V_0 = \left\{ a \in H^1(D) \text{ et } a = 0 \text{ sur } \Gamma_w \text{ et } \Gamma_e \right\}$ (pour $H^1(D)$ cf. cours)

- La forme faible est $a \in V$ et $\forall a' \in V_0 \; : \; \int_D \nu \, \vec{\nabla} a \cdot \vec{\nabla} a' \, ds = 0$

- L'énergie magnétique (par unit. de long.) est $W = \int_D \nu \frac{|\vec{\nabla} a|^2}{2} \, ds$
Elle n'est pas nulle parce que $a \notin V_0$, en effet

$$2\,W = \int_D \nu \vec{\nabla} a \cdot \vec{\nabla} a \, ds = \int_D \vec{\nabla} \cdot \left(a \, \nu \, \vec{\nabla} a \right) \, ds - \int_D \underbrace{a \, \vec{\nabla} \cdot \left(\nu \, \vec{\nabla} a \right)}_{=0 \text{ cf. forme forte}} \, ds$$

soit

$$2\,W = \int_{\Gamma_s + \Gamma_n} a \, \nu \, \underbrace{\partial_n a}_{=0} \, dl + \int_{\Gamma_e} \underbrace{a}_{=0} \, \nu \, \partial_n a \, dl + \int_{\Gamma_w} \underbrace{a}_{=0} \, \nu \, \partial_n a \, dl = A_0 \, I$$

avec $I = \int_{\Gamma_e} \frac{\partial_n a}{\mu_0} \, dl$ le courant (surfacique) qui correspond au flux magnétique A_0.

Propriété de l'énergie magnétique

- Si toutes les longueurs sont multipliées par un même facteur la valeur de W ne change pas (ça se constate mais surtout ça se déduit de l'expression de W).

- W est une fonction de μ_r et

$$\frac{dW}{d\mu_r} = \underbrace{\int_D \nu\, \vec{\nabla} a \cdot \vec{\nabla} \partial_{\mu_r} a \; ds}_{=0 \text{ parce que } \partial_{\mu_r} a \in V_0} - \frac{1}{\mu_r^2} \int_{D_m} \frac{|\vec{\nabla} a|^2}{2} \, ds \leq 0$$

- Le rapport $A_0^2/(2\; W\; L)$ est la reluctance d'une cellule (de longueur L dans la direction $\vec{k}_z$) du circuit magnétique $\cdots\boxed{\square\square\square\square}\cdots$
Ce qui permet de connaître l'ordre de grandeur des $W_{\mu_r=0}$, $W_{\mu_r=1}$ et $W_{\mu_r=\infty}$ en utilisant les approximations usuelles sur les circuits magnétiques.

- Et le calcul effectif permet de se rendre compte que dès que $\mu_r > 10$ la valeur de W ne change plus guère (et c'est heureux pour les applications de l'électrotechnique vu que la relation $\vec{b} = \mu_r\; \vec{h}$ est très incertaine).