CAO - GE

Induction électromagnétique

G. Vinsard

Gerard.Vinsard@univ-lorraine.fr

4 avril 2020

Objectifs

► Résumer les différents aspects de la modélisation des problèmes d'induction électromagnétique [1] en l'absence de mouvement et dans le cas de matériaux magnétiques linéaires.

► Approprier ces aspects au cas axisymétrique puis au cas 2D droit.

► L'objectif est surtout de présenter le vocabulaire utilisé pour la CAO électrotechnique, aussi les calculs intermédiaires ne sont-ils pas effectués [2] ; il n'est donc pas demandé de savoir les faire mais par contre les formules devront être comprises à un niveau d'utilisateur de logiciel.

---

1. Sans entrer dans les complications afférentes à l'approximation des basses fréquences : notamment le ≪ potentiel scalaire électrique ≫ est relégué à son rôle minimal.
2. On s'est contenté de présenter la forme forte du problème mais c'est avec la forme faible qu'on obtient les résultats intéressants.

Induction électromagnétique en l'absence de mouvement, sans prise en compte des effets capacitifs et dans le cas de matériaux à comportement magnétique linéaire

► Un inducteur et une charge occupent les domaines D_i et D de l'espace E_3 ; le courant électrique de l'inducteur est $i(t) = \Re\{\underline{i}\ \exp^{j\,\omega\,t}\}$ et on demande de calculer

- les courants induits (courants de Foucault) dans la charge sachant que la matière dont elle est constituée est conductrice (conductivité σ) et magnétique linéaire (perméabilité magnétique relative μ_r) ;
- les densité de puissance Joule et densité de forces électromagnétiques qui en résultent dans cette charge.

► Voilà comment se pose en général un problème d'induction électromagnétique dans les hypothèses du titre.

Les équations de l'induction électromagnétique

► Les équations du problème d'induction d'électromagnétisme peuvent être exprimées de plusieurs façons suivant le jeu de variables utilisé. On choisit ici comme variables l'amplitude complexe du potentiel vecteur magnétique $\underline{\vec{a}}$ et le potentiel scalaire électrique $\underline{\varphi}$ qui sont solutions de

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}} \right) = \underline{\vec{j}}_s - s \left(j\,\omega\,\underline{\vec{a}} + \vec{\nabla}\underline{\varphi} \right) \quad ; \quad \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{a}} = 0$$

où les fonctions de conductivité et de perméabilité

$$\begin{array}{ccccc} s & : & E_3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & \vec{x} & \longrightarrow & s(\vec{x}) = \begin{cases} \sigma \text{ si } \vec{x} \in D \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} \mu & : & E_3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & \vec{x} & \longrightarrow & s(\vec{x}) = \begin{cases} \mu_0\ \mu_r \text{ si } \vec{x} \in D \\ \mu_0 \text{ sinon} \end{cases} \end{array}$$

sont des données, comme l'est la densité de courant source

$$\begin{array}{ccccc} \underline{\vec{j}}_s & : & E_3 & \longrightarrow & \text{espace des densités de courant} \\ & & \vec{x} & \longrightarrow & \underline{\vec{j}}_s(\vec{x}) = \begin{cases} \text{quelque chose} & \text{si } \vec{x} \in D_i \\ \vec{0} \text{ sinon} \end{cases} \end{array}$$

Les dénotations du problème : la puissance réactive

► Supposons le problème résolu (i.e. on dispose d'un logiciel qui résoud l'équation) ; la question est d'en identifier les éléments.

► À partir du potentiel vecteur magnétique $\underline{\vec{a}}$ seul, il est possible de calculer l'induction magnétique

$$\underline{\vec{b}} = \vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}}$$

et de calculer

$$Q = \omega \int_{E_3} \frac{|\underline{\vec{b}}|^2}{\mu} \, dV$$

qu'on appelle la puissance réactive. Son utilisation sera expliquée dans la discussion sur la source.

Le courant induit

► À partir des deux potentiels vecteur magnétique $\underline{\vec{a}}$ et scalaire électrique $\underline{\varphi}$, il est possible de calculer la densité de courants induits

$$\underline{\vec{j}} = -s\,(j\,\omega\,\underline{\vec{a}} + \vec{\nabla}\underline{\varphi}) = \begin{cases} -\sigma\,(j\,\omega\,\underline{\vec{a}} + \vec{\nabla}\underline{\varphi}) & \text{dans } D_i \\ \vec{0} & \text{ailleurs} \end{cases}$$

On peut deviner là le rôle de φ

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu}\,\vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}} \right) = \underline{\vec{j}_s} + \underline{\vec{j}} = \vec{0} \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{divergence}} 0 = \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{j}_s} + \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{j}}$$

Si $\vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{j}_s} = 0$ (ce qui sera le cas, voir la discussion sur les sources) il vient

$$\vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{j}} = 0 \text{ d'où } \Delta\underline{\varphi} = 0 \text{ dans } D\ ;\ \frac{\partial \underline{\varphi}}{\partial n} + j\,\omega\,\underline{\vec{a}} \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \partial D$$

On dispose d'un problème qui permet le calcul de $\underline{\varphi}$ et qui révèle son rôle : c'est un multiplicateur de Lagrange de la contrainte $\vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{j}} = 0$

La puissance active

► En l'absence de mouvement de celle-ci la puissance active P apportée à la charge se limite à la puissance Joule des courants induits, soit

$$P = \int_D \frac{|\vec{\underline{j}}|^2}{\sigma}\, dV = \int_D \sigma\, |j\,\omega\,\vec{\underline{a}} + \vec{\nabla}\underline{\varphi}|^2\, dV = \int_{E_3} s\, |j\,\omega\,\vec{\underline{a}} + \vec{\nabla}\underline{\varphi}|^2\, dV$$

► Comme pour la puissance réactive une partie de son utilisation sera expliquée dans la discussion sur la source.

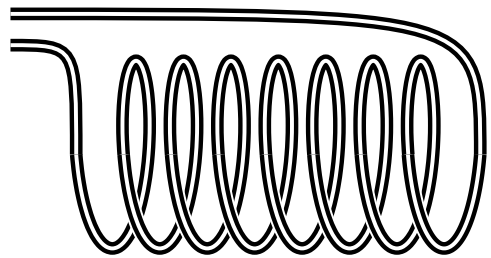
► Mais l'autre partie peut être expliquée tout de suite. Le terme

$$\dot{q} = \frac{|\vec{\underline{j}}|^2}{\sigma}$$

est la densité de puissance injectée à la charge. C'est le terme qui doit être utilisé pour calculer son échauffement via un modèle de transfert de chaleur.

La source : position du problème

► La question se pose ainsi : d'un côté on dispose d'une sorte de serpentin (l'objet inducteur) qui n'est pas fermé sur lui-même



et de l'autre d'une fonction vectorielle, la densité de courant source,

$$\begin{array}{rcccl} \underline{\vec{j}}_s & : & E_3 & \longrightarrow & \text{espace des densités de courant} \\ & & \vec{x} & \longrightarrow & \underline{\vec{j}}_s(\vec{x}) = \begin{cases} \text{quelque chose} & \text{si } \vec{x} \in D_i \\ \vec{0} & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

dont s'agit de faire correspondre le ≪ quelque chose ≫ à l'idée d'un courant inducteur $\underline{i}$ qui parcourt l'inducteur.

► De plus l'inducteur est connecté au générateur (un dispositif d'électronique de puissance typiquement un onduleur) qui crée la tension $\underline{v}$ source motrice du courant.

Une forme de la densité de courant source

► Tout d'abord on décide de connecter l'une à l'autre les deux extrémités libres de l'inducteur ; celui-ci change alors de connexité, il devient un tore [3] et il existe justement dans les tores D_i un et un seul champ de vecteurs $\vec{u}$ tel que

$$\left.\begin{array}{l}\vec{\nabla}\times\vec{u}=\vec{0}\\ \vec{\nabla}\cdot\vec{u}=0\end{array}\right\} \text{ dans } D_i \text{ avec } \left\{\begin{array}{l}\vec{u}\cdot\vec{n}=0 \text{ sur } \partial D_i\\ \displaystyle\int_{\Sigma_i}\vec{u}\cdot\vec{n}=1\\ (\Sigma_i \text{ une surface de coupure du tore})\end{array}\right.$$

Ce champ de vecteur, qui porte le nom d'élément générateur de l'espace de cohomologie du tore est utilisé pour faire l'approximation

$$\vec{\underline{j}}_s = \underline{i}\,\vec{u} \text{ dans } D_i$$

3. i.e. un domaine de E_3 dans lequel existent des courbes fermées sur elles même (les lacets) qui ne peuvent se transformer un un point par une déformation continue telles que les points de la courbe restent toujours intérieur à ce domaine et qui perd cette propriété par une coupure appropriée (la déconnexion des deux extrémités

Impédance équivalente du dispositif inducteur+charge

- La tension $\underline{v}$ qui correspond au courant $\underline{i}$ circulant dans l'inducteur se calcule comme

$$\underline{v} = \int_{D_i} j\,\omega\,\underline{\vec{a}}\cdot\vec{u}\,dV$$

et le champ $\underline{\vec{a}}$ solution de

$$\vec{\nabla}\times\left(\frac{1}{\mu}\,\vec{\nabla}\times\underline{\vec{a}}\right) = \underline{\vec{j}_s} - s\,\left(j\,\omega\,\underline{\vec{a}} + \vec{\nabla}\underline{\varphi}\right)\quad ;\quad \vec{\nabla}\cdot\underline{\vec{a}} = 0$$

se révélera tel que (l'exposant « * » indique la conjugaison complexe)

$$\underline{v}\,\underline{i}^* = P + j\,Q$$

Il est donc possible d'obtenir l'impédance équivalente Z du dispositif inducteur avec sa charge comme

$$Z = \frac{P + j\,Q}{|\underline{i}|^2} = \frac{\underline{v}}{\underline{i}}$$

Symétrie axisymétrique

► Si l'inducteur et la charge sont axisymétriques, i.e. en coordonnées cylindriques

$$\vec{x} = r\ \vec{k}_r + x\ \vec{k}_z \text{ avec } \begin{cases} \vec{k}_r &= \cos\theta\ \vec{k}_x + \sin\theta \vec{k}_y \\ \vec{k}_\theta &= -\sin\theta\ \vec{k}_x + \cos\theta\ \vec{k}_y \end{cases}$$

invariants par rotation de l'angle orthoradial, alors des simplifications considérables arrivent.

► Les fonctions de conductivité s et de perméabilité μ sont re-définies sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ et donc sont de la forme

$$\begin{array}{rcccl} s & : & \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (r,z) & \longrightarrow & s(r,z) = \begin{cases} \sigma \text{ si } (r,z) \in \Sigma \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \\ \mu & : & \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (r,z) & \longrightarrow & \mu(r,z) = \begin{cases} \mu_0\ \mu_r \text{ si } (r,z) \in \Sigma \\ \mu_0 \text{ sinon} \end{cases} \end{array}$$

où maintenant le domaine $\subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de la charge est noté Σ.

Symétrie axisymétrique

- La densité de courant source et le potentiel vecteur sont de la forme

$$\vec{\underline{a}} = \underline{a}\ \vec{k_\theta}\ ;\ \vec{\underline{j}_s} = \underline{j}_s\ \vec{k_\theta}$$

avec

$$\begin{array}{rcccl} \underline{a} & : & \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & (r,z) & \longrightarrow & \underline{a}(r,z) \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{rcccl} \underline{j}_s & : & \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & (r,z) & \longrightarrow & \underline{j}_s(r,z) \end{array}$$

- Les équations de l'induction se réduisent à

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r\ \mu}\frac{\partial(r\ \underline{a})}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r\ \mu}\frac{\partial(r\ \underline{a})}{\partial z}\right) + \underline{j}_s - j\ \omega\ s\ \underline{a} = 0$$

le potentiel scalaire électrique disparaît !

- L'élément générateur de l'espace de cohomologie a une forme analytique

$$\vec{u} = u\ \vec{k_\theta} \text{ avec } u = \frac{1}{r \displaystyle\int_{\Sigma_i} \frac{dr\ dz}{r}}$$

où le domaine de l'inducteur est noté Σ_i.

Symétrie axisymétrique

- La tension source $\underline{v}$ est

$$\underline{v} = 2\pi \frac{\displaystyle\int_{\Sigma_i} j\ \omega\ \underline{a}\ dr\ dz}{\displaystyle\int_{\Sigma_i} \frac{dr\ dz}{r}}$$

- L'induction magnétique

$$\vec{\underline{b}} = -\frac{\partial \underline{a}}{\partial z}\ \vec{k}_r + \frac{1}{r}\ \frac{\partial\ r\ \underline{a}}{\partial r}\ \vec{k}_r$$

et la puissance réactive

$$Q = 2\ \pi\ \omega \int_{\infty}^{\infty} dz \int_{0}^{\infty} r\ dr\ \frac{\left|\frac{\partial \underline{a}}{\partial z}\right|^2 + \left|\frac{1}{r}\ \frac{\partial\ r\ \underline{a}}{\partial r}\right|^2}{\mu}$$

Symétrie axisymétrique

- Et finalement la puissance active

$$P = 2\,\pi \int_{\Sigma} \sigma\,|j\,\omega\,\underline{a}|^2\,r\,dr\,dz$$

- Le point clé est donc le calcul de $\underline{a}$ solution de

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r\,\mu}\frac{\partial(r\,\underline{a})}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r\,\mu}\frac{\partial(r\,\underline{a})}{\partial z}\right) + \underline{j}_s - j\,\omega\,s\,\underline{a} = 0$$

on voit que la structure est (au terme $-j\,\omega\,s\,a$ près) celle de la magnétostatique et effectivement $\underline{a}$ se calcule par une méthode d'éléments finis standard (Lagrange P1 sur un maillage triangulaire) comme cela a été expliqué dans la leçon sur le sujet, explication sur la troncature du domaine infini incluse.

- Cette conclusion est cependant un peu optimiste. En effet si la profondeur de pénétration de l'effet Kelvin $\delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma\,\omega\,\mu_0\,\mu_r}}$ devient très petite devant les dimensions caractéristiques de la charge la densité du maillage nécessaire pour prendre en compte la décroissance rapide du potentiel vecteur magnétique dans la charge est de l'ordre de $1/\delta$ et donc un nombre considérable d'éléments devraient être générés ce qui peut devenir incompatible avec les ressources en mémoire disponibles.

Condition d'impédance de frontière

► Dans le cas donc où δ est très petit devant les dimensions caractéristiques de la charge, on utilise une approche asymptotique, appelée la méthode d'impédance de frontière.

► Le principe est de faire l'approximation que $\underline{a}$ est nul dans l'intérieur de la charge et qu'il décroit vers 0 depuis le bord de cette charge comme ce serait prédit par une approximation 1D.

► On arrive donc à reformuler le problème général comme la recherche de $\underline{a}$ tel que

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r\,\mu}\frac{\partial(r\,\underline{a})}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r\,\mu}\frac{\partial(r\,\underline{a})}{\partial z}\right)+\underline{j}_s=0 \text{ dans } \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}-\Sigma$$

avec cette condition aux limites (de type Robin) sur le bord $\partial\Sigma$

$$-\frac{1}{r\,\mu_0}\frac{\partial\, r\,\underline{a}}{\partial n}=\frac{1+j}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\sigma\omega}{\mu_0\mu_r}}\,\underline{a} \text{ sur } \partial\Sigma$$

qui s'appelle la condition aux limites d'impédance de frontière.

Puissances active et réactive

► Cette approximation demande de nouvelles expressions pour le calcul des puissances active et réactive, ce sont

$$P = 2\,\pi\,\delta \int_{\partial\Sigma} \sigma\,\frac{|j\omega\underline{\vec{a}}|^2}{2}\,dl$$

et

$$Q = 2\,\pi\,\omega\left(\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}-\Sigma} \frac{\left|\frac{\partial \underline{a}}{\partial z}\right|^2 + \left|\frac{1}{r}\,\frac{\partial\, r\,\underline{a}}{\partial r}\right|^2}{\mu}\,r\,dr\,dz + \delta\int_{\partial\Sigma}\frac{1}{\mu_0\mu_r}\left|\frac{\underline{\vec{a}}}{\delta}\right|^2\,dl\right)$$

où ds est l'élément de longueur d'une description paramétrique de la ligne $\partial\Sigma$. Si cette description est $r = R(s), z = Z(s)$ alors

$$dl = \sqrt{\left(\frac{dR}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{ds}\right)^2}\,ds$$

► Cela peut sembler compliqué mais c'est relativement simple à implanter au niveau des éléments finis (et donc plus simple encore à utiliser).

Symétrie 2D droite

► La symétrie 2D droite apporte des simplifications pratiques mais, contrairement à la symétrie axisymétrique, également une complication théorique comme on le verra. La direction d'invariance est $\vec{k_z}$ (la symétrie est dite cylindrique).

► Les fonctions de conductivité s et de perméabilité μ sont re-définies sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et donc sont de la forme

$$
\begin{array}{rcccl}
s & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & & (x,y) & \longrightarrow & s(x,y) = \begin{cases} \sigma \text{ si } (x,y) \in \Sigma \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \\
\mu & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & & (x,y) & \longrightarrow & \mu(x,y) = \begin{cases} \mu_0\ \mu_r \text{ si } (x,y) \in \Sigma \\ \mu_0 \text{ sinon} \end{cases}
\end{array}
$$

où, comme pour l'axisymétrie, le domaine de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de la charge est noté Σ.

Symétrie 2D droite

► La densité de courant source et le potentiel vecteur sont de la forme

$$\vec{\underline{a}} = \underline{a}\ \vec{k_z}\ ;\ \vec{\underline{j}_s} = \underline{j}_s\ \vec{k_z}$$

avec $\underline{a}$: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$, $(x,y) \longrightarrow \underline{a}(x,y)$; $\underline{j}_s$: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$, $(x,y) \longrightarrow \underline{j}_s(x,y)$

► Les équations de l'induction se réduisent à

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial \underline{a}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial \underline{a}}{\partial y}\right) + \underline{j}_s - j\,\omega\,s\,\underline{a} = 0$$

comme en axisymétrie le potentiel scalaire électrique disparaît.

► Et là arrive un premier avatar de la complication théorique, lié à la définition de l'inducteur.

L'inducteur en 2D droit

► L'inducteur a été vu comme un serpentin dont les extrémités ont été connectées l'une à l'autre pour faire apparaître un tore à propos duquel un objet mathématique était disponible à partir duquel un courant source crédible pouvait être construit.

► En 2D droit, ce n'est plus le cas. L'inducteur possède deux composantes connexes dont les sections droites sont Σ_i^+ et Σ_i^-, l'une est le support du courant aller, l'autre du courant retour. Aussi la densité de courant source sera-t-elle de la forme

$$\vec{u} = u\,\vec{k_z} \text{ avec } u = \begin{cases} \frac{1}{\int_{\Sigma_i^+} dx\,dy} & \text{dans } \Sigma_i^+ \\ \frac{-1}{\int_{\Sigma_i^-} dx\,dy} & \text{dans } \Sigma_i^- \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

La charge

▶ Comme en axisymétrie, les fonctions de conductivité s et de perméabilité μ sont re-définies sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et donc sont de la forme

$$
\begin{array}{rcccl}
s & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & & (x,y) & \longrightarrow & s(x,y) = \begin{cases} \sigma \text{ si } (x,y) \in \Sigma \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \\
\mu & : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & & (x,y) & \longrightarrow & \mu(x,y) = \begin{cases} \mu_0 \, \mu_r \text{ si } (x,y) \in \Sigma \\ \mu_0 \text{ sinon} \end{cases}
\end{array}
$$

où le domaine de $\subset \mathbb{R}^2$ de la charge est encore noté Σ.

La tension source et les puissances

- La tension source $\underline{v}$ par unité de longueur L est

$$\underline{v} = L \left(\frac{\int_{\Sigma_i^+} j\,\omega\,\underline{a}\,dx\,dy}{\int_{\Sigma_i} dx\,dy} - \frac{\int_{\Sigma_i^-} j\,\omega\,\underline{a}\,dx\,dx}{\int_{\Sigma_i} dx\,dy} \right)$$

- L'induction magnétique

$$\underline{\vec{b}} = \frac{\partial \underline{a}}{\partial x}\,\vec{k}_x - \frac{\partial\,\underline{a}}{\partial x}\,\vec{k}_x$$

et la puissance réactive par unité de longueur L

$$Q = L\,\omega \int_{\infty}^{\infty} dx \int_{0}^{\infty} dy\, \frac{\left|\frac{\partial \underline{a}}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial\,\underline{a}}{\partial y}\right|^2}{\mu}$$

- Et finalement la puissance active par unité de longueur L

$$P = L \int_{\Sigma} \sigma\,|j\,\omega\,\underline{a}|^2\,dx\,dy$$

Effet Kelvin

- Lorsque l'effet Kelvin est très prononcé (dans les mêmes conditions que pour l'axisymétrie), le domaine de la charge est éliminé du domaine de calcul su profit d'une condition aux limite d'impédance de frontière sur le bord ainsi créé, soit $\underline{a}$ solution de

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial \underline{a}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial \underline{a}}{\partial y}\right)+\underline{j}_s=0 \text{ dans } \mathbb{R}^2-\Sigma$$

avec cette condition aux limites (de type Robin) sur le bord $\partial\Sigma$

$$-\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial\, \underline{a}}{\partial n}=\frac{1+j}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\sigma\omega}{\mu_0\mu_r}}\,\underline{a} \text{ sur } \partial\Sigma$$

- Les puissances active et réactive pour une longueur de L sont alors

$$P=L\,\delta\int_{\partial\Sigma}\sigma\,\frac{|j\omega\underline{\vec{a}}|^2}{2}\,dl$$

et

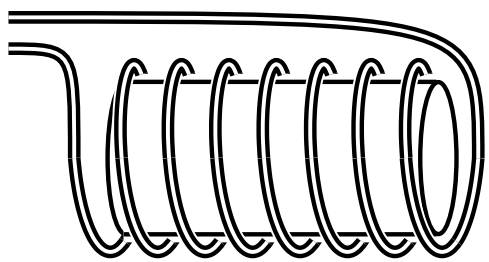
$$Q=L\,\omega\left(\int_{R^2-\Sigma}\frac{\left|\frac{\partial \underline{a}}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial\, \underline{a}}{\partial y}\right|^2}{\mu}\,dx\,dy+\delta\int_{\partial\Sigma}\frac{1}{\mu_0\mu_r}\left|\frac{\underline{\vec{a}}}{\delta}\right|^2\,dl\right)$$

Extension de l'exposé et exercice

► L'exposé n'a jamais considéré qu'un seul inducteur et une seule charge mais le cas où ces objets sont multiples peut être envisagé ;

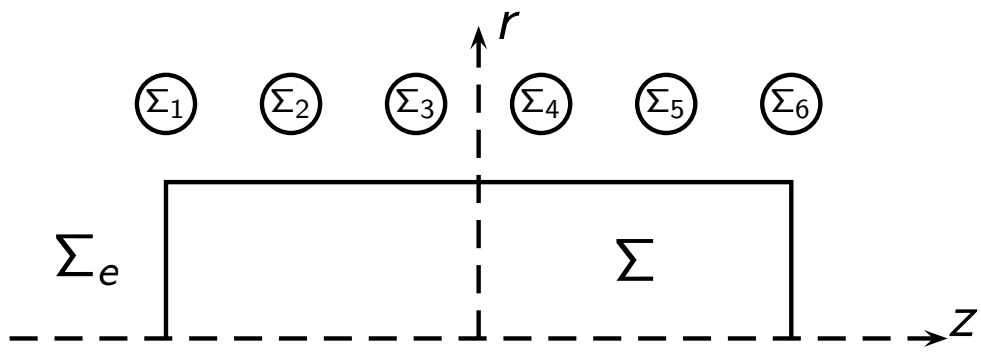
► Il n'a pas non plus introduit la question des symétries.

► À titre d'exercice et pour compenser ces manques on peut écrire les éléments de modélisation qui permettent de traiter le cas d'une billette dans une bobine en supposant que la spirale de l'inducteur puisse être approximée par une suite de spires axisymétriques.



Correction

- Symétrie : avec l'approximation suggérée, le domaine de calcul est



où $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ se décompose en Σ_n, les sections des N composantes de l'inducteur (ici $N = 6$) ; Σ la section de la charge et Σ_e celle du reste du domaine de calcul.

- Densité de courant source

$$\vec{j_s} = \begin{cases} i/(r\,\chi) & \text{dans les } \Sigma_n \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad \text{avec } \chi = \int_{\Sigma_1} \frac{dr\ dz}{r}$$

Correction

- Conductivité électrique d et perméabilité magnétique μ

$$s = \begin{cases} \sigma \text{ dans } \Sigma \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad ; \quad \mu(r,z) = \begin{cases} \mu_0\ \mu_r \text{ dans } \Sigma \\ \mu_0 \text{ sinon} \end{cases}$$

- Potentiel vecteur magnétique (amplitude complexe de la composante orthoradiale) $\underline{a}$ est solution de

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r\ \mu}\frac{\partial(r\ \underline{a})}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r\ \mu}\frac{\partial(r\ \underline{a})}{\partial z}\right) + \underline{j}_s - j\ \omega\ s\ \underline{a} = 0$$

- Tension source

$$\underline{v} = \frac{2\ \pi}{\chi}\sum_{n=1}^{N}\int_{\Sigma_n} j\ \omega\ \underline{a}\ dr\ dz$$

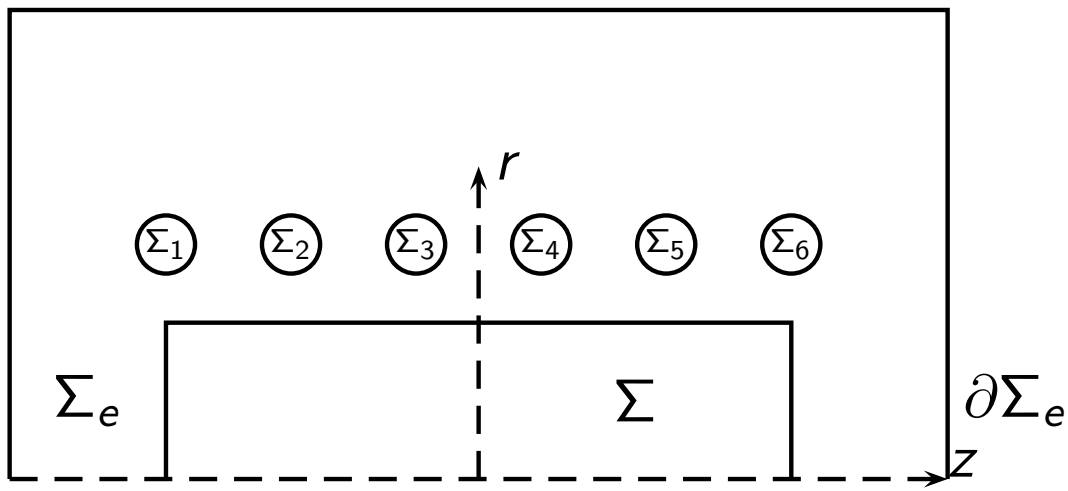
La tension aux bornes de l'inducteur est la somme de chacune des tensions des spires qui le composent (l'amenée de courant est négligée).

Limitation du domaine de calcul

► Le domaine Σ_e (l'entrefer) est infini, ce n'est pas compatible avec la méthode des éléments finis aussi décide-t-on de n'en retenir qu'une région « suffisamment grande » et d'imposer une condition de Dirichlet (c'est un choix possible, il y une discussion à mener pour définir précisément la dimension acceptable pour cette approximation)

$$\underline{a} = 0$$

sur son bord extérieur $\partial\Sigma_e$:

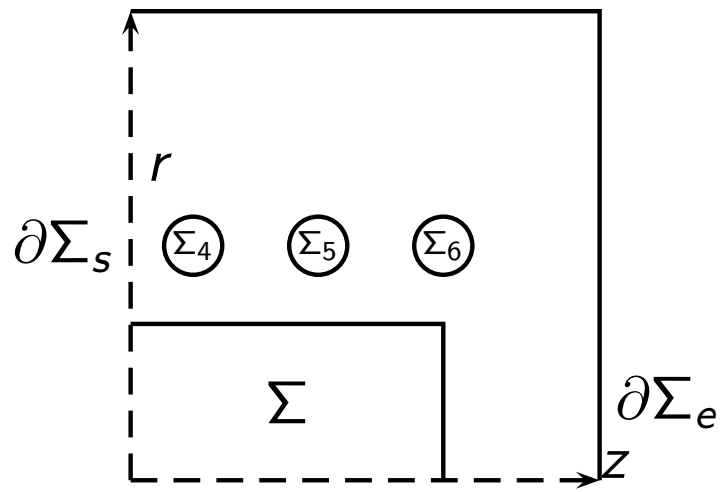


Symétrie

▶ On remarque (soit en le calculant avec un logiciel soit directement par analyse du problè dont il est solution) $\underline{a}$ est pair par rapport à z, soit

$$\underline{a}(r,-z) = \underline{a}(r,z)$$

Il y a donc un gain à faire en restreignant le calcul aux $z > 0$. Le domaine de calcul est alors



où une nouvelle frontière de Σ_e apparaît, qu'on nomme $\partial\Sigma_s$ et sur laquel on impose la condition de symétrie de parité qui est

$$\frac{\partial \underline{a}}{\partial z} = 0$$

Calcul pratique et extensions

- Voir script Freefem++ joint pour un calcul pratique.

On remarque que la syntaxe du script est la transcription presque mot pour mot de la forme faible qui peut être obtenue à partir de la formulation faite ici en forme forte (cf leçon précédente pour les détails, il n'y a à ajouter que l'implantation du terme $\underline{a}\,\underline{a}'$ (si $\underline{a}'$ est le champ qui peut prendre toutes les valeurs possibles, ce qui est immédiat).

- La prise en compte d'un effet Kelvin prononcé n'est pas réalisée dans le script, c'est laissé en exercice.