CAO - GE

Aimants permanents, courants électriques et aimantation induite du point de vue de la magnétostatique

G. Vinsard

Gerard.Vinsard@univ-lorraine.fr

12 février 2018

Objectifs

► Dans un problème de gravitation (non relativiste) Le rôle du champ gravitationnel est le suivant :

1. Toute répartition de masses (densité ρ en kg/m^3) crée un champ gravitationel $\vec{\mathcal{G}}$ qui se calcule comme

$$\Delta\Phi + 4\ \pi\ G\ \rho = 0\ ;\ \vec{\mathcal{G}} = -\vec{\nabla}\Phi$$

2. Les force et couple (à la position $\vec{x} = 0$) qui s'exercent sur les masses formant un solide (i.e. maintenues à distances invariables les unes des autres par des forces internes) dont le domaine est D comme

$$\vec{F} = \int_D \rho(\vec{x})\ \vec{\mathcal{G}}(\vec{x})\ dV\ ;\ \vec{\Gamma} = \int_D \vec{x} \times \rho(\vec{x})\ \vec{\mathcal{G}}(\vec{x})\ dV$$

►*Mutatis mutandis* la magnétostatique correspond à ce type de représentation.

les détails suivent... L'objectif de la leçon est d'exposer ces détails.

Les détails

- La gravitation part de la donnée de la masse (via la densité de masse ρ), la magnétostatique du vide part elle des aimants permanents et des distributions de courant électrique dont il s'agit déjà de spécifier les représentations.

- La densité de force gravitationnelle est le produit de la densité de masse par l'opposé du gradient du potentiel gravitationnel ; l'équivalent de cela est expliqué pour la magnétostatique du vide.

- De plus les milieux magnétiques linéaires, isotropes et locaux en temps sont introduits (phénoménologiquement) ; la densité de force est mise sous forme de la divergence du tenseur des efforts de Maxwell ; et *in fine* le potentiel vecteur magnétique et les flux magnétiques associés aux courants sont brièvement spécifiés.

- Par rapport à un cours complet de magnétostatique il manque donc l'introduction des énergies et coénergie magnétique, leur variation dans un déplacement pour déduire les forces par le principe des travaux virtuels ; les non-linéarités et anisotropies magnétiques. . . mais l'objectif de la leçon est juste de fournir un vade-mecum des notions de bases, i.e. les détails du programme spécifié.

Aimantation : aimants immobiles

► Macroscopiquement, un aimant permanent est caractérisé par sa densité d'aimantation (aimantation en bref). Un ensemble de N aimants occupant les domaines bornés D_n, $n = 1 \dots N$ de l'espace E_3 est donc décrit par un champ de vecteurs de $L^2(E_3)^3$

$$\begin{array}{ccccc} \vec{m} & : & E_3 & \longrightarrow & E_3(A/m) \\ & & \vec{x} & \longrightarrow & \vec{m}(\vec{x}) \end{array}$$

où $\vec{m}$ est nul en dehors des domaines D_n.
Pour simplifier, seuls les aimants dont la densité d'aimantation est uniforme sont considérés, soit

$$\vec{m}(\vec{x}) = \begin{cases} \vec{m}_n & \text{dans les } D_n, n = 1 \dots N \\ \vec{0} & \text{ailleurs, i.e. dans } E_3 - \displaystyle\sum_{n=1\dots N} D_n \end{cases}$$

où les $\vec{m}_n$ sont des vecteurs constants dont l'unité est l'ampère par mètre A/m.

Densité de courant : systèmes de courants immobiles

► Le courant électrique est caractérisé par sa densité de courant, soit un élément de $L^2(E_3)^3$

$$\begin{array}{rccl} \vec{j} & : & E_3 & \longrightarrow & E_3(A/m^2) \quad \text{avec } \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0 \\ & & \vec{x} & \longrightarrow & \vec{j}(\vec{x}) \end{array}$$

dans le cadre de la magnétostatique la densité de courant est obligatoirement à divergence nulle.
Pour simplifier, seuls les courants électriques se décomposant en systèmes de courants comportant un nombre fini N' de courant globaux sont considérés, soit

$$\vec{j}(\vec{x}) = \sum_{n=1}^{N'} i_n \, \vec{u}_n(\vec{x}) \qquad \text{avec} \qquad \forall n \ : \ \vec{\nabla}\cdot\vec{u}_n = 0$$

où les i_n sont les courants (en A) et les $\vec{u}_n$ sont les supports des courants (en $1/m^2$).

Production de champ et induction magnétiques par les aimants

- Comme tout champ de vecteur dans E_3 à support borné (ce qui arrive dès lors que les aimants sont situés à distance finie les uns des autres), la densité d'aimantation admet une décomposition (de Helmholtz) unique en parties gradiente et rotationnelle, soit

$$\vec{m} = \frac{\vec{b}}{\mu_0} - \vec{h} \text{ avec } \vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0 \text{ et } \vec{\nabla} \times \vec{h} = \vec{0}$$

qu'on écrit plutôt

$$\vec{b} = \mu_0 \left(\vec{h} + \vec{m} \right) \text{ avec } \vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0 \text{ et } \vec{\nabla} \times \vec{h} = \vec{0}$$

où $\vec{b}$ s'appelle l'induction magnétique et $\vec{h}$ le champ magnétique. Ces deux champs sont de carré sommable sur E_3.

$\mu_0 = 4\,\pi\,10^{-7}\ H/m$ s'appelle la perméabilité magnétique du vide ; l'unité de $\vec{b}$ est le Tesla T et celle de $\vec{h}$ l'ampère par mètre A/m.

Équations des champ et induction magnétiques produits par les aimants

► De part la condition $\vec{\nabla} \times \vec{h} = \vec{0}$, on obtient

$$\vec{\nabla} \times \frac{\vec{b}}{\mu_0} = \vec{\nabla} \times \vec{m} \; ; \; \vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0$$

et inversement de part $\vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\mu_0 \, \vec{h}\right) + \vec{\nabla} \cdot (\mu_0 \, \vec{m}) = 0 \; ; \; \vec{\nabla} \times \vec{h} = \vec{0}$$

Ces deux systèmes d'équations permettent le calcul effectif de $\vec{b}$ et $\vec{h}$ (cf. infra l'introduction des potentiels).

► Sous cette forme, c'est toutefois au prix d'identifier ce que sont $\vec{\nabla} \times \vec{m}$ et $\vec{\nabla} \cdot \vec{m}$ alors que $\vec{m}$ ($= \vec{m}_n$ dans les D_n et $\vec{0}$ ailleurs) est constante par morceaux.

Courants ampériens

► Courant ampérien : le produit scalaire de $\vec{\nabla} \times \vec{m}$ appliqué à un champ de vecteurs $\vec{a}$ de $\mathcal{D}^3(E_3)$ est

$$\int_{E_3} (\vec{\nabla} \times \vec{m}) \cdot \vec{a}\, dV$$

il s'écrit également (cf. Annexe)

$$\int_{E_3} (\vec{\nabla} \times \vec{m}) \cdot \vec{a}\, dV = \int_{E_3} \vec{m} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a})\, dV$$

soit ($\vec{m} = \vec{0}$ en dehors des D_n et $\vec{m} = \vec{m}_n$ constant dans D_n)

$$\sum_{n=1}^{N} \int_{D_n} \vec{m} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a})\, dV = \sum_{n=1}^{N} \vec{m}_n \cdot \int_{D_n} \vec{\nabla} \times \vec{a}\, dV$$

Courants ampériens

- Cela permet de continuer le calcul comme

$$\sum_{n=1}^{N} \vec{m}_m \cdot \int_{D_n} \vec{\nabla} \times \vec{a}\, dV = -\sum_{n=1}^{N} \vec{m}_m \cdot \int_{\partial D_n} \vec{a} \times \vec{n}\, dS$$

soit, en reprenant l'expression de départ en 1ier membre,

$$\int_{E_3} (\vec{\nabla} \times \vec{m}) \cdot \vec{a}\, dV = \sum_{n=1}^{N} \int_{\partial D_n} (\vec{m}_n \times \vec{n}) \cdot \vec{a}\, dS$$

Il vient donc (cf. Annexe) que

$$\vec{\nabla} \times \vec{m} = \sum_{n=1}^{N} (\vec{m}_n \times \vec{n})\ \delta_{\partial D_n}$$

Les $(\vec{m}_m \times \vec{n})\, \delta_{\partial_{D_n}}$ s'appellent des densités de courant ampériennes. L'unité de $\delta_{\partial D_n}$ est le $1/m$ (pour l'homogénéité de la formule le définissant, cf. supra et donc celles des densités ampérienne est l'A/m^2.

Masses magnétiques

- De la même façon que pour $\vec{\nabla} \times \vec{m}$,

$$\begin{aligned}
\int_{E_3} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{m}\right) \lambda \, dV &= -\int_{E_3} \vec{m} \cdot \left(\vec{\nabla}\lambda\right) dV \\
&\quad -\sum_{n=1}^{N} \vec{m}_n \cdot \int_{D_n} \vec{\nabla}\lambda \, dV \\
&\quad -\sum_{n=1}^{N} \int_{\partial D_n} \lambda \, (\vec{m}_n \cdot \vec{n}) \, dS
\end{aligned}$$

d'où

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{m} = \sum_{n=1}^{N} -(\vec{m}_n \cdot \vec{n}) \, \delta_{\partial D_n}$$

les $-(\vec{m}_n \cdot \vec{n}) \, \delta_{\partial D_n}$ s'appellent des masses magnétiques. Leur unité est l'A/m^2.

Formes fortes des problèmes fournissant les champ et induction magnétiques

- $\vec{b}$ et $\vec{h}$ sont donc solutions de

$$\vec{\nabla} \times \frac{\vec{b}}{\mu_0} = \sum_{n=1}^{N+1} (\vec{m}_n \times \vec{n}) \ \delta_{\partial D_n} \ ; \ \vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\mu_0 \ \vec{h}\right) - \sum_{n=1}^{N+1} (\vec{m}_n \cdot \vec{n}) \ \delta_{\partial D_n} = 0 \ ; \ \vec{\nabla} \times \vec{h} = \vec{0}$$

- Ou encore, du fait de la linéarité des problèmes,

$$\vec{b} = \sum_{n=1}^{N} \vec{b}_n \ ; \ \vec{h} = \sum_{n=1}^{N} \vec{h}_n$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \dfrac{\vec{b}_n}{\mu_0} = (\vec{m}_n \times \vec{n}) \ \delta_{\partial D_n} \\ \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{b}_n = 0 \end{array} \right. \quad ; \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \left(\mu_0 \ \vec{h}_n\right) - (\vec{m}_n \cdot \vec{n}) \ \delta_{\partial D_n} = 0 \\ \\ \vec{\nabla} \times \vec{h}_n = \vec{0} \end{array} \right.$$

Représentations ampérienne et coulombienne des aimants

- La représentation ampérienne des aimants consiste à calculer l'induction magnétique $\vec{b}$ et déduire le champ magnétique si besoin par

$$\vec{h} = \frac{\vec{b}}{\mu_0} - \vec{m}$$

- Inversement la représentation coulombienne des aimants consiste à calculer le champ magnétique $\vec{h}$ et déduire l'induction magnétique si besoin par

$$\vec{b} = \mu_0 \left(\vec{m} + \vec{h}\right)$$

- Et l'utilisation simultanée des deux représentations sous des modalités divers s'appelle une formulation duale.

- Dans la suite seule la représentation ampérienne est utilisée ; non parce qu'elle est intrinséquement meilleure que l'autre mais par souci d'économie et de synthèse.

Production de champ et induction magnétiques par les courants électriques

- Les courants électriques supposés à support borné produisent les champ et induction magnétiques solutions du problème

$$\vec{\nabla} \times \vec{h} = \vec{j}\,;\ \vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0\ ;\ \vec{b} = \mu_0\, \vec{h}$$

et ces champ et induction magnétiques sont indiscernables de ceux qui sont produits par des aimants. (c'est l'apport d'Ørsted)

- Ou encore, de part la linéarité de ces équations,

$$\vec{b} = \sum_{n=1}^{N} \vec{b}_n\ ;\ \vec{h} = \sum_{n=1}^{N} \vec{h}_n$$

avec

$$\vec{\nabla} \times \vec{h}_n = i_n\, \vec{u}_n\ ;\ \vec{\nabla} \cdot \vec{b}_n = 0\ ;\ \vec{b}_n = \mu_0\, \vec{h}_n$$

Production de champ et induction magnétiques par les courants électriques ou par des aimants

- Les résultats obtenus peuvent être regroupés en considérant N objets dont chacun d'entre eux est soit un courant soit un aimant. L'induction magnétique est alors solution de [1]

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{b}/\mu_0\right) = \vec{j}\,;\ \vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0\ ;\quad \text{avec}\ \ \vec{j} = \sum_{n=1}^{N} \vec{j}_n$$

où $\vec{j}$ est la densité de courant globale : si l'objet n est un

  - courant alors l'intensité i_n et son support $\vec{u}_n$ (avec $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_n = 0$) ont à être spécifiés et

$$\vec{j}_n = i_n\, \vec{u}_n$$

  - aimant alors l'aimantation uniforme $\vec{m}_n$ et le domaine D_n ont à être spécifiés et

$$\vec{j}_n = \vec{m}_n \times \vec{n}\, \delta_{\partial D_n}$$

---

1. **exercice :** Trouver $\vec{h}$

Force de Laplace

- Les champs et induction magnétiques produits par les aimants et les courants étant définis comme précédemment, la question est maintenant d'indiquer les force et couple qui s'exercent sur les aimants et les courants.

- La densité de force de Laplace est

$$\vec{f} = \vec{j} \times \vec{b} = \sum_{n=1}^{N} \vec{j}_n \times \vec{b}$$

et les force $\vec{F}_n$ et couple (pris en $\vec{x} = 0$) $\vec{\Gamma}_n$ qui s'exercent sur l'objet n sont

$$\vec{F}_n = \int_{E_3} \vec{j}_n \times \vec{b} \, dV \; ; \; \vec{\Gamma}_n = \int_{E_3} \vec{x} \times \left(\vec{j}_n \times \vec{b} \right) \, dV$$

- *Le programme initialement fixé de réaliser avec la magnétostatique ce qui a été brièvement décrit pour la gravitation (non-relativiste) est donc rempli mais seulement dans le cas où seuls des courants et des aimants (rigides de surcroît) sont en présence.*

Troubles avec les formules de force et couple

- Tant que $\vec{j}_n$ est la densité d'un courant réparti régulièrement dans l'espace (i.e. $\vec{u}_n \in L^2(E_3)$), les formules de force et couple ne posent pas de problèmes particuliers de calcul.

- Si ce courant est localisé sur une surface, comme il l'est dans la représentation ampérienne des aimants pour laquelle $\vec{j}_n = \vec{m}_n \times \vec{n}\, \delta_{\partial D_n}$ une difficulté apparaît puisqu'alors la composante tangentielle de $\vec{b}$ n'est pas continue et que le produit d'une fonction discontinue par une distribution de Dirac n'a *a priori* pas de sens.

- Ce problème peut être évité soit au niveau tactique par des astuces numériques soit à un niveau plus stratégique par des clarifications physiques sur la nature des formules de force et couple.

- Mais ça dépasse un peu les objectifs de la leçon, aussi supposera-t-on (espérera-t-on ?) que les logiciels utilisés relèvent d'une analyse prenant en compte le problème.

Magnétisme induit

►La situation à l'échelle microscopique est compliquée : il y a des charges électriques qui sont disposées de manière qu'on puisse constater la neutralité électrique à l'échelle macroscopique (sauf dans les diélectriques) ; ces charges électriques sont dotées de moments magnétiques qui se disposent encore de manière telle qu'à l'échelle macroscopique il y ait une neutralité magnétique, sauf dans certaines circonstances qui sont précisément celles des aimants permanents et des matériaux dans lesquels le magnétisme puisse être induit.

► Le magnétisme induit se traduit par la présence d'une aimantation qui ne se manifeste qu'en présence d'un champ magnétique extérieur. La description phénoménologique la plus simple de ce comportement consiste à poser que dans un domaine magnétique (i.e. susceptible de magnétisme induit) il y a une densité d'aimantation de la forme

$$\begin{array}{rcccl} \vec{m} & : & D \times E_3(A/m) & \longrightarrow & E_3(A/m) \\ & & (\vec{x}, \vec{h}) & \longrightarrow & \vec{m}(\vec{x}, \vec{h}) = \chi\, \vec{h}(\vec{x}) \end{array}$$

où on suppose que l'aimantation dépend linéairement du champ magnétique (le coefficient χ s'appelle la susceptibilité magnétique) et cela de façon instantanée.

Magnétostatique en présence de magnétisme induit

► L'introduction de domaines magnétiques modifie la description de la planche 14 comme [2]

$$\vec{\nabla} \times \vec{h} = \vec{j}\ ;\ \vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0\ ;\ \vec{b} = \mu\, \vec{h} \ \text{ avec }\ \vec{j} = \sum_{n=1}^{N} \vec{j}_n$$

où $\vec{j}$ reste la densité de courant globale, les $\vec{j}_n$ valant $\vec{j}_n = i_n\, \vec{u}_n$ ou $\vec{j}_n = \vec{m}_n \times \vec{n}\, \delta_{\partial D_n}$ suivant que l'objet n soit un courant ou un aimant.

► Mais cette fois μ n'est pas une simple constante. L'espace E_3 étant recouvert par $P+1$ domaines D_p, $p = 0 \ldots P$ c'est une fonction constante par morceaux

$$\begin{array}{cccc} \mu & : & E_3 & \longrightarrow & \mathbb{R}(H/m) \\ & & \vec{x} & \longrightarrow & \mu_0 \displaystyle\sum_{p=0}^{P} \mu_{r|p}\, \Pi_p(\vec{x}) \end{array}$$

où les Π_p sont les fonctions indicatrices des D_p (cf. Annexe) et où les $\mu_{r|p}$ sont les perméabilités relatives des domaines D_p (elles valent $1 + \chi_p$)

2. **exercice :** $\vec{h}$ est-il le champ magnétique dans les aimants ?

Densité de forces magnétiques

- Convenons que le domaine D_0 est le lieu des positions où de la perméabilité magnétique est μ_0 (la perméabilité magnétique relative y est 1). Les courants ou des aimants sont dans D_0 et les force et couple qui s'exercent sur eux restent ceux qui correspondent à la densité de forces de Laplace de la planche 15.

- Mais il y a des forces supplémentaires qui sont celles qui s'exercent sur les domaines magnétiques et s'appellent les forces magnétiques. La densité de forces magnétiques est

$$\frac{\vec{b}^{\,2}}{2}\,\vec{\nabla}\left(\frac{1}{\mu}\right) = \frac{\vec{b}^{\,2}}{2}\,\vec{\nabla}\nu \;\text{ avec } \nu = \frac{1}{\mu} \text{ (la reluctivité magnétique)}$$

Compte tenu que μ et donc également ν sont constantes par morceaux, cette densité s'écrit

$$\vec{f}_{\text{supplémentaire}} = \sum_{p=1}^{P} \frac{1}{\mu_0}\,\left(1 - \frac{1}{\mu_{r|p}}\right)\,\frac{\vec{b}^{\,2}}{2}\,\vec{n}\,\delta_{\partial D_p}$$

où apparaît le problème souligné planche 16, qu'on choisit encore d'ignorer.

Forces magnétiques

- Les force $\vec{F}_p$ et couple $\vec{\Gamma}_p$ (pris à la position $\vec{x} = \vec{0}$) s'exerçant sur les domaines magnétique sont donc

$$\vec{F}_p = \int_{\partial D_p} \frac{1}{\mu_0} \left(1 - \frac{1}{\mu_{r|p}}\right) \frac{\vec{b}^{\,2}}{2} \, \vec{n} \, dS$$

et

$$\vec{\Gamma}_p = \int_{\partial D_p} \frac{1}{\mu_0} \left(1 - \frac{1}{\mu_{r|p}}\right) \frac{\vec{b}^{\,2}}{2} \, \vec{x} \times \vec{n} \, dS$$

Si on choisit d'ignorer la difficulté soulignée planche 16, on peut affirmer que le programme fixé initialement est réalisé.

- Un exemple d'utilisation de ces expression est celui de la pression magnétique. Si $\mu_{r|p} \longrightarrow \infty$ alors $\vec{F}_p = \int_{\partial D_p} \frac{\vec{b}^{\,2}}{2\,\mu_0} \, \vec{n} \, dS$; on voit alors que la force s'exerce de manière qu'elle tende à déplacer le domaine magnétique vers les zones où $\vec{b}^{\,2}$ est le plus grand ; ce qui est conforme avec l'expérience (un milieu magnétique est attiré vers les zones où l'induction magnétique est la plus grande).

Tenseur de Maxwell

- L'expression des densités de forces de Laplace et magnétiques cumulées est

$$\vec{f} = \vec{j} \times \vec{b} + \frac{\vec{b}^{\,2}}{2} \vec{\nabla} \left(\frac{1}{\mu} \right)$$

- Cette expression s'écrit en composantes dans une base $(\vec{k}_x, \vec{k}_x, \vec{k}_z)$, en utilisant la convention des indices répétés et en utilisant la reluctivité $\nu = 1/\mu$ plutôt que la perméabilité

$$\vec{f} = \epsilon_{ijk}\ j_i\ b_k\ \vec{k}_i + \frac{b_l\ b_l}{2}\ \nu_i\ \vec{k}_i \text{ avec } \epsilon_{ilm}(\nu\ b_m)_{,l} = j_i$$

- Quelques calculs amènent à (δ_{ij} le symbole de Kronecker)

$$\vec{f} = \left(\nu\ b_i\ b_j - \frac{1}{2}\ \nu\ \delta_{ij}\ b_l\ b_l \right)_{,\,j}\ \vec{k}_i$$

ce qui porte à définir le tenseur des efforts de Maxwell $\overline{\overline{T}}$ dont les composantes sont

$$\overline{\overline{T}}_{ij} = \nu\ b_i\ b_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\ \nu\ b_l\ b_l$$

Tenseur de Maxwell

- La densité de force s'écrit à partir du tenseur des efforts de Maxwell comme
$$\vec{f} = \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{T}} = T_{ij,j}\ \vec{k}_i$$

- C'est une forme assez pratique puisque si on cherche les force et couple (au point $\vec{x} = \vec{0}$) qui s'exercent sur une région D de l'espace (supposée solide et elle peut contenir des ensembles de courants, aimants et domaines magnétiques), celle-ci prennent la forme

$$\vec{F} = \int_{\partial D} T_{ij}\ n_j\ dS\ \vec{k}_i\ ;\ \vec{\Gamma} = \int_{\partial D} \epsilon_{ijk}\ x_j\ T_{kl}\ n_l\ dS\ \vec{k}_i$$

- Ajoutons finalement que l'utilisation du tenseur des efforts de Maxwell permet d'éviter les difficultés évoquées planche 16.
Ce n'est évidemment pas un hasard, et d'ailleurs le tenseur des efforts de Maxwell ne se réduit pas à une simple astuce mathématique. Mais les objectifs de la leçon ne permettent pas d'aller plus loin.

Le potentiel vecteur magnétique

- Jusqu'ici seuls les champ et induction magnétique ont été utilisés. Ce qui suppose de savoir trouver pratiquement la solution d'un problème posé comme

$$\vec{\nabla} \times \vec{h} = \vec{j}\,;\ \vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0\ ;\ \vec{b} = \mu\, \vec{h}$$

- Une façon de faire (mais pas la seule) consiste à introduire le potentiel vecteur magnétique : si $\vec{\nabla} \cdot \vec{b} = \vec{0}$ alors $\exists\ \vec{a}$ tel que $\vec{b} = \vec{\nabla} \times \vec{a}$ (lemme de Poincaré) ; de plus, étant entendu que $\vec{a} \in H^1_{\mathrm{rot}}(E_3) \subset L^2(E_3)^3$, ce potentiel scalaire magnétique sera unique si on demande que $\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = 0$ (jauge de Coulomb). Après cela $\vec{a}$ doit être solution de

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{\nabla} \times \vec{a}}{\mu} \right) = \vec{j}\,;\ \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = 0$$

qui est un problème de nature elliptique très semblable à ceux étudiés en cours de mathématique.

Le flux magnétique

- Si la densité de courant est de la forme

$$\vec{j} = \sum_{n=1}^{N'} i_n \ \vec{u}_n + \sum_{n=N'+1}^{N} \vec{m}_n \times \vec{n} \, \delta_{\partial D_n}$$

et que les support $\vec{u}_n$ des courants ne s'interpénètrent pas, i.e. si $\vec{u}_n(\vec{x}) \neq \vec{0}$ alors $\forall \ p \neq n \ : \ \vec{u}_p(\vec{x}) = \vec{0}$ et qu'il s'interpénètrent pas non plus les aimants $\forall \ \vec{x} \in D_n \ : \ \vec{u}_n = \vec{0}$
alors on peut introduire les flux magnétiques (Weber ou Wb) ϕ_n associés aux courants i_n comme

$$\phi_n = \int_{E_3} \vec{u}_n \cdot \vec{a} \, dV$$

- La linéarité et la symétrie du problème dont dépend $\vec{a}$ permet de poser *a priori* que ces flux sont reliés aux courants par des relations

$$\phi_n = \sum_{p=1}^{N'} M_{pn} \ i_p$$

où les $M_{pn} = M_{np}$ sont les coefficients d'inductance.

Annexe : Rappels et compléments du cours de mathématiques

- Les cours sur les distributions et sur les Équations aux Dérivées Partielles (EDP) des semestres 6 et 7 (à l'ENSEM et en comptant les semestres suivant l'usage actuel)

- Le livre d'Appel `http://www.h-k.fr/publications/maths_pour_physique.html` couvre le sujet.

$L^2(E_3)^3$, $H^1(E_3)^3$, $H^1_{\mathrm{rot}}(E_3)$ et $H^1_{\mathrm{div}}(E_3)$ (en gros)

- Les champs de vecteurs de E_3 peuvent s'écrire $\vec{u} = u_x \; \vec{k}_x + u_y \; \vec{k}_y + u_z \; \vec{k}_z$ où $(\vec{k}_x, \vec{k}_y, \vec{k}_z)$ est une base (orthonormée) de E_3 et où les u_x, u_y, u_z sont des fonctions de la postion $\vec{x}$ dans E_3.

- $L^2(E_3)^3$ est l'espace des champs de vecteurs de carré sommable sur E_3, i.e. $\int_{E_3} \vec{u}^2 \; dV = \int_{E_3} \left(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2\right) \; dV$ existe (les u_x, u_y, u_z sont dans $L^2(E_3)$).

- L'espace de Sobolev $H^1(E_3)^3$ est alors celui des champs de $L^2(E_3)$ pour lesquels les composantes u_x, u_y, u_z appartiennent à $H^1(E_3)$, i.e. les dérivées $\partial_j u_i$ avec $(i,j) \in \{x, y, z\}$ sont dans $L^2(E_3)$.

- L'espace de Sobolev $H^1_{\mathrm{div}}(E_3)$ est le sous-espace de $H^1(E_3)$ pour lequel seulement la combinaison de dérivées qui forme la divergence d'un champ de vecteur est élément de $L^2(E_3)$, ou encore $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \in L^2(E_3)$

- L'espace de Sobolev $H^1_{\mathrm{rot}}(E_3)$ est le sous-espace de $H^1(E_3)$ pour lequel seulement les combinaisons de dérivées qui sont les composantes du rotationnel d'un champ de vecteur sont éléments de $L^2(E_3)$, ou encore $\vec{\nabla} \times \vec{u} \in L^2(E_3)^3$

Formules d'analyse vectorielle

- Si $\vec{u}, \vec{v} \in H^1_{\text{rot}}(E_3)$

$$\int_{E_3} \left(\vec{\nabla} \times \vec{v}\right) \cdot \vec{w} \, dV = \int_{E_3} \left(\vec{\nabla} \times \vec{w}\right) \cdot \vec{v} \, dV$$

- On ajoute aux espaces $H^1_{\text{grad}}(E_3)$ qui contient les champs de scalaires λ de $L^2(E_3)$ dont les dérivées par rapport à x, y, z sont éléments de $L^2(E_3)$, soit encore $\vec{\nabla}\lambda \in L^2(E_3)^3$.

- Si $\lambda \in H^1_{\text{grad}}(E_3)$ et $\vec{u} \in H^1_{\text{div}}(E_3)$

$$\int_{E_3} \lambda \, \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \, dV = -\int_{E_3} \vec{v} \cdot \vec{\nabla}\lambda \, dV$$

- Ces deux formules sont très utiles !

Dérivation faible

- On sait que la dérivation faible d'une fonction $f \in L_2(\mathbb{R})$ est définie comme

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \ : \ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df}{dx}(x)\, \phi(x)\, dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \frac{d\phi}{dx}(x)\, dx$$

où $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ indéfiniment différentiables et à support compact.

- Cette définition peut être étendue en utilisant les formules d'analyse vectorielles précédentes comme

$$\forall \vec{w} \in \mathcal{D}^3(E_3) \ : \ \int_{E_3} \left(\vec{\nabla} \times \vec{v}\right) \cdot \vec{w}\, dV = \int_{E_3} \left(\vec{\nabla} \times \vec{w}\right) \cdot \vec{v}\, dV$$

$$\forall \lambda \in \mathcal{D}(E_3) \ : \ \int_{E_3} \lambda\, \vec{\nabla} \cdot \vec{v}\, dV = -\int_{E_3} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \lambda\, dV$$

où $\mathcal{D}(E_3)$ et $\mathcal{D}^3(E_3)$, sont les ensembles de champs de scalaires et de vecteurs sur E_3 indéfiniment différentiables et à support compact.

Distribution de Dirac

► En abrégeant les précautions mathématiques, la distribution de Dirac pour les fonctions réelles à valeurs réelles est définie par

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \ : \ \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)\, \delta(x)\, dx = \phi(0)$$

définition qui peut être étendue à toute fonction réelle ϕ pourvue qu'elle soit définie en 0 (donc pas une fonction discontinue en 0 ou encore qui tend vers l'infini).

► Sur le même modèle, la distribution δ_S de Dirac sur une surface $S \subset E_3$ est définie comme

$$\int_{E_3} \delta_s \, \lambda = \int_S \lambda \, dS$$

où λ est un champ scalaire disons de $H^1(E_3)$ pour éviter les apories liées à la discontinuité.
δ_S est appelée la distribution de Dirac surfacique.

Domaine borné de E_3 et son bord ∂D

- Un domaine D borné est doté d'un bord ∂D sur lequel est défini un champ de normales extérieur (i.e. qui pointe vers l'extérieur de D). On suppose toujours que ce bord est lisse (i.e. pas de coins ni arêtes) de manière que le champ de normales soit partout défini. Mais on continue d'accepter les domaines donc le bord ne soit pas lisse pourvu que ça ne soit que dans un ensemble de points négligeable par rapport aux points de ce bord.

- On ne considère que des domaines ouverts au sens de la topologie, i.e. tout point du domaine est intérieur à une boule ouverte dont il est le centre et dont tous les points appartiennent au domaine ; ce qui fait que les points du bord d'un domaine n'appartiennent pas à ce domaine.

- Un domaine connexe est d'un seul tenant ; un domaine simplement connexe est connexe et de plus il ne comporte ni trou ni boucle.

Intégration sur un domaine

- L'intégration sur tout E_3 s'écrit

$$\int_{E_3} \lambda \, dV = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dz \, \lambda(x, y, z)$$

- Pour un domaine D (borné ou non) c'est plus compliqué à exprimer explicitement du fait des bornes d'intégration ; une façon de faire est de considérer la fonction indicatrice de D, soit

$$\Pi(\vec{x}) = \{1 \text{ si } \vec{x} \in D \text{ ; } 0 \text{ sinon}\}$$

Ainsi

$$\int_D \lambda \, dV = \int_{E_3} \Pi \, \lambda \, dV$$

- Par exemple le volume de D est

$$\int_D 1 \, dV = \int_{E_3} \Pi \, dV$$

De l'intérieur à la frontière

- La formule de Green-Ostrogradki s'écrit

$$\int_D \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \int_{\partial D} \vec{u} \cdot \vec{n}\, dS$$

- Elle permet de voir que le gradient de la fonction indicatrice Π d'un domaine D est exactement le produit du Dirac de surface $\delta_{\partial d}$ de son bord ∂D par l'opposé du champ de normale $\vec{n}$ de ce bord. En effet la dérivation faible de Π est

$$\forall \vec{u} \in \mathcal{D}(E_3)^3 \ : \ \int_{E_3} \vec{\nabla}\Pi \cdot \vec{u}\, dV = -\int_{E_3} \Pi\, \vec{\nabla} \cdot \vec{u}\, dV = -\int_D \vec{\nabla} \cdot \vec{u}\, dV$$

soit, compte tenu de la formule de Green-Ostrogradski

$$\forall \vec{u} \in \mathcal{D}(E_3)^3 \ : \ \int_{E_3} \vec{\nabla}\Pi \cdot \vec{u}\, dV = -\int_{\partial D} \vec{u} \cdot \vec{n}\, dS$$

même si on ne peut pas écrire

$$\int_{\partial D} \vec{u} \cdot \vec{n}\, dS = \int_{E_3} \delta_{\partial D}\, \vec{u} \cdot \vec{n}\, dV$$

dès lors que le champ de normale est défini sur ∂D mais pas ailleurs dans E_3.

Intégration dans un domaine et sur son bord

- En plus de la formule de Green-Ostrogradski on dispose de

$$\int_D \vec{\nabla} \times \vec{a} \, dV = - \int_{\partial D} \vec{a} \times \vec{n} \, dS$$

et

$$\int_D \vec{\nabla} \lambda \, dV = \int_{\partial D} \lambda \, \vec{n} \, dS$$

- Ça se montre facilement avec les notations usuelles pour les tenseurs cartésiens et de la formule générale

$$\int_D \lambda_{,i} \, dV = \int_{\partial D} \lambda \, n_i$$

si $\vec{n} = n_x \, \vec{k}_x + n_y \, \vec{k}_y + n_z \, \vec{k}_z = n_i \, \vec{k}_i$

Par ex. $\vec{a} = a_i \, \vec{k}_i \Longrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{a} = \epsilon_{ijk} \, a_{k,j} \, \vec{k}_i$ et $\vec{u} \times \vec{n} = \epsilon_{ijk} \, u_n \, n_k \, \vec{k}_i$
d'où

$$\int_D \epsilon_{ijk} \, a_{k,j} \, dV = \int_{\partial D} \epsilon_{ijk} \, a_k \, n_j$$

Réponses aux exercices et problème supplémentaire

► P14 : c'est $\vec{b}/\mu_0 - \vec{m}$. Remarquer que la composante normale de $\vec{h}$ est discontinue à la traversée des ∂D_n puisque celle de $\vec{b}$ est continue alors que celle de $\vec{m}$ ne l'est pas. Remarquer aussi que $\vec{b}/\mu_0$ n'est pas $\vec{h}$ (le champ magnétique) dans les aimants mais qu'il l'est en dehors.

► P18 : Non ! Pour les raisons données à l'exercice de P14. Par contre $\vec{h}$ est le champ magnétique partout ailleurs, y compris dans les milieux magnétiques linéaires. Dans ceux-ci $\vec{b} = \mu\,\vec{h}$ et donc l'aimantation $\vec{m}_l$ se trouve par comparaison avec $\vec{b} = \mu_0\left(\vec{h} + \vec{m}_l\right)$; soit $\vec{m}_l = (1/\mu_0 - 1/\mu)\,\vec{b}$ qui est nul lorsque $\mu = \mu_0$ et n'est pas nécessairement uniforme dans le milieu magnétique.

► Le problème : Calculer les champs, induction, potentiel vecteur et scalaire magnétiques d'un aimant sphérique uniformément aimanté pour lequel

$$\vec{m}(\vec{x}) = \begin{cases} m\,\vec{d} & \text{pour } |\vec{x}| < R \\ \vec{0} & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} & m \text{ est la densité d'aimantation} \\ \text{et} & \vec{d} \text{ est un vecteur de direction } (|\vec{d}| = 1) \end{cases}$$

Aimant sphérique : les équations des champ et induction

- Pour $|\vec{x}| < R$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0 \; ; \; \vec{\nabla} \times \vec{h} = \vec{0} \; ; \; \vec{b} = \mu_0 \; \vec{h}$$

- pour $|\vec{x}| > R$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0 \; ; \; \vec{\nabla} \times \vec{h} = \vec{0} \; ; \; \vec{b} = \mu_0 \; \vec{h}$$

- en $|\vec{x}| = R$, la normale à cette surface étant $\vec{n} = \vec{x}/R$,

$$\left.\vec{b} \times \vec{n}\right|_{\text{côté } |\vec{x}|>R} - \left.\vec{b} \times \vec{n}\right|_{\text{côté } |\vec{x}|<R} = -m \; \vec{d} \times \vec{n}$$
$$\left.\vec{h} \cdot \vec{n}\right|_{\text{côté } |\vec{x}|>R} - \left.\vec{h} \cdot \vec{n}\right|_{\text{côté } |\vec{x}|<R} = -m \; \vec{d} \cdot \vec{n}$$

- à l'infini ($|\vec{x}| \to \infty$)

$$|\vec{b}| = \mu_o \; |\vec{h}| \to 0$$

Difficile de deviner...

Aimant sphérique : les équations des potentiels

- Pour $\vec{a}$ et ψ tels que $\vec{\nabla} \times \vec{a} = \vec{b}$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = 0$ et $\vec{\nabla}\psi = \vec{h}$ les équations deviennent

$$\text{Pour } |\vec{x}| < R \text{ ou } |\vec{x}| > R \ : \ \vec{\Delta}\vec{a} = \vec{0}\,;\ \Delta\psi = 0$$

et, compte tenu que $\vec{n} = \vec{x}/R$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{a}) \times \vec{x}\Big|_{\text{côté } |\vec{x}|>R} - (\vec{\nabla} \times \vec{a}) \times \vec{x}\Big|_{\text{côté } |\vec{x}|<R} = -m\,\vec{d} \times \vec{x}$$

$$\vec{\nabla}\psi \cdot \vec{x}\Big|_{\text{côté } |\vec{x}|>R} - \vec{\nabla}\psi \cdot \vec{x}\Big|_{\text{côté } |\vec{x}|<R} = -m\,\vec{d} \cdot \vec{x}$$

Aimant sphérique en coordonnées sphériques

- Si $\vec{x} = r \left(\sin\theta \left(\cos\phi \, \vec{k}_x + \sin\phi \, \vec{k}_y \right) + \cos\theta \, \vec{k}_z \right)$ alors les vecteurs normaux aux surfaces $r =$ Cste, $\psi =$ Cste, $\theta =$ Cste sont

$$
\begin{aligned}
\vec{k}_r &= \sin\theta \, \left(\cos\phi \, \vec{k}_x + \sin\phi \, \vec{k}_y \right) + \cos\theta \, \vec{k}_z \\
\vec{k}_\phi &= -sin\phi \, \vec{k}_x + \cos\phi \, \vec{k}_y \\
\vec{k}_\theta &= \cos\theta \, \left(\cos\phi \, \vec{k}_x + \sin\phi \, \vec{k}_y \right) - \sin\theta \, \vec{k}_z
\end{aligned}
$$

le terme $\vec{d} \cdot \vec{n} = \vec{d} \cdot \vec{x}/R$ est

$$\sin\theta \left(\cos\phi \, \vec{k}_x \cdot \vec{d} + \sin\phi \, \vec{k}_y \cdot \vec{d} \right) + \cos\theta \, \vec{k}_z \cdot \vec{d}$$

Si on choisit les axes de manière que $\vec{k}_z = \vec{d}$ il reste

$$\vec{d} \cdot \vec{n} = \cos\theta$$

qui ne dépend pas de ϕ !

Potentiel scalaire en coordonnées sphériques

- Le gradient de ψ en sphérique est

$$\vec{\nabla}\psi = \partial_r\psi\ \vec{k}_r + \frac{1}{r}\ \partial_\theta\psi\ \vec{k}_\theta + \frac{1}{r\ \sin\theta}\ \partial_\phi\psi$$

- Dans le choix $\vec{k}_z = \vec{d}$ la relation, valable pour $r = R$,

$$\vec{\nabla}\psi\cdot\vec{n}\Big|_{\text{côté }|\vec{x}|>R} - \vec{\nabla}\psi\cdot\vec{n}\Big|_{\text{côté }|\vec{x}|<R} = -m\ \vec{d}\cdot\vec{n} = -m\ \cos\theta$$

s'écrit

$$\partial_r\psi|_{\text{côté }r>R} - \partial_r\psi|_{\text{côté }r<R} = -m\ \cos\theta$$

Il n'y a pas de raison que ψ dépende de ϕ et donc

$$\psi = m\ \cos\theta\ f(r)\ \text{ avec }\ \frac{df}{dr}\Big|_{\text{côté }r>R} - \frac{df}{dr}\Big|_{\text{côté }r<R} = -1$$

► D'autre part le laplacien de ψ qui ne dépend pas de ϕ est

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}+\frac{\cos\theta}{r^2\ \sin\theta}\ \frac{\partial\psi}{\partial\theta}$$

et donc les conditions de laplacien nul s'écrivent

$$\text{Pour } r<R \text{ ou } r>R\ :\ \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{df}{dr}\right)-\frac{2}{r^2}f=0$$

Compte tenu que $|\psi|<\infty$ partout, $\lim_{r\to\infty}\psi=0$ et ψ est continu en $r=R$ (sinon la dérivation introduirait un Dirac) la solution est de la forme

$$f(r)=\alpha\left\{\begin{array}{lll} r & \text{pour} & r<R \\ R^3/r^2 & & r>R \end{array}\right.$$

où la constante α doit satisfaire à $\frac{df}{dr}|_{\text{côté } r>R}-\frac{df}{dr}|_{\text{côté } r<R}=-1$, c'est

$$\alpha=-\frac{1}{3}$$

Le champ magnétique de l'aimant sphérique

► Le potentiel scalaire magnétique est donc ($r\ \cos\theta = \vec{x}\cdot\vec{k}_z$ et $\vec{d} = \vec{k}_z$)

$$\psi = -\frac{m}{3}\begin{cases} r\ \cos\theta & \text{si}\quad r < R \\ \frac{R^3}{r^3}\ r\ \cos\theta & \quad r > R \end{cases} = -\frac{m}{3}\ \vec{x}\cdot\vec{d}\begin{cases} 1 & \text{si}\quad |\vec{x}| < R \\ \frac{R^3}{|\vec{x}|^3} & \quad |\vec{x}| > R \end{cases}$$

Le membre de droite étant exprimé indépendamment du système de coordonnées,

► Les formules d'analyse vectorielle connues permettent alors de trouver

$$\vec{h} = \vec{\nabla}\psi = m\begin{cases} -\vec{d}/3 & \text{si}\quad |\vec{x}| < R \\ \frac{R^3}{|\vec{x}|^3}\left(3\,\frac{(\vec{x}\cdot\vec{d})\,\vec{x}}{|\vec{x}|^2} - \vec{d}\right) & \quad |\vec{x}| > R \end{cases}$$

L'induction magnétique de l'aimant sphérique

- Comme $\vec{b} = \mu_0 \left(\vec{h} + \vec{m}\right)$, il vient directement

$$\vec{b} = \mu_0\ m \begin{cases} 2\ \vec{d}/3 & \text{si} \quad |\vec{x}| < R \\ \dfrac{R^3}{|\vec{x}|^3} \left(3\ \dfrac{(\vec{x}\cdot\vec{d})\ \vec{x}}{|\vec{x}|^2} - \vec{d}\right) & \quad\quad |\vec{x}| > R \end{cases}$$

- Cette expression aurait pu être trouvée directement en introduisant le potentiel vecteur $\vec{a}$; puis l'expression de son rotationnel ; qui aurait eu à satisfaire

$$(\vec{\nabla}\times\vec{a})\times\vec{x}\Big|_{\text{côté } |\vec{x}|>R} - (\vec{\nabla}\times\vec{a})\times\vec{x}\Big|_{\text{côté } |\vec{x}|<R} = -m\ \vec{d}\times\vec{x}\,;$$

d'où serait sortie une forme commode de $\vec{a}$; que le laplacien vectoriel aurait permis de préciser... C'est d'ailleurs un excellent exercice que de réaliser ce programme [3]

3. **exercice :** montrer que $\vec{a} = \dfrac{\mu_0\ m}{3} \left(\vec{d}\times\vec{x}\right) \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |\vec{x}| < R \\ \frac{R^3}{|\vec{x}|^3} & \quad\quad |\vec{x}| > R \end{cases}$ est bien tel que $\vec{b} = \vec{\nabla}\times\vec{a}$